١٠-٢: ثانياً : التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية

١٠-٢-١ : الوحدة الأولى

الدالة والنهاية

الدالـــة

يعتبر علم التفاضل والتكامل من العلوم الحديثة ويستخدم اليوم في كل العلوم الطبيعية والاقتصادية والاجتماعية والتربوية لذلك لابد أن يلم الطالب بمبادئ هذا العلم حتى يساعده ذلك في دراسته المستقبلية .

وكمدخل لعلم التفاضل والتكامل لابد من بعض التعريفات التي تقود في مجموعها الي معرفة ما هو التفاضل . وتهدف هذه الوحدة إلي تعريف الطالب بالمفاهيم الأساسية التي تساعد مع فهم التفاضل والتكامل:

تعريفات :

الثابت: CONSTAUT : هو المقدار الذي لا تتغير قيمته أثناء العملية الرياضية ويرمز له عادة بالحروف أ ، ب ، د ، ج ، د ، ......

المتغير: ARIABLE : المتغير هو المقدار الذي تتغير قيمته أثناء العملية الرياضية بمعنى بمعنى أنة يأخذ قيما مختلفة ويرمز له بالحروف س ، ص ، ع ...... وينقسم إلى قسمين :

(i) **متغير مستقل** independent : وهو الذي لا يعتمد في تغيره على تغير كمية أخري.

(ii) **متغير تابع** dependent وهذا يعتمد في تغيره على تغير كمية أخري .

الدالة : وهى علاقة تربط متغيرين أو أكثر بعلاقة ما ويرمز لها بالرمز (د) فإذا قلنا أن ص = د (س) يعنى ذلك أن هنالك علاقة تربط ص كمتغير تابع ب س كمتغير مستقل وإذا قلنا أن ص = ٣س- س+ ٢ فهذا يعنى أن ص تربط بعلاقة مع س وهذه العلاقة هى أن ص دوما تساوى ثلاثة أضعاف مربع س مطروحا منها س ومضافا إليها ٢ حيث ص متغير تابع س متغير مستقل ٣ ، ٢ثوابت . وتتغير قيم ص تبعا لقيم س ، كذلك مساحة الاسطوانة = (Π نق^{٢}ر) تمثل دالة في ثلاثة متغيرات .

وتكـتب : م = Π نق^{٢} ر حـيث: (م مـساحة الاسطـوانة ، نـق= نـصف القطـر ر = الارتفـاع Π النـسبة الثابتـة وتـساوي ٣,١٤ أو ٢٢/٧ والمتغيرات هـي متغيرات تابع (نق ، ر) متغيرين مستقلين ، Π ثابت .

ويحتوي هذا الباب علي (أ) الدالة (ب) نهاية الدالة

إذ ا ارتبطـت س مـع مـتغيرات تابعـة أخـري تـكـتب الـدوال هـكـذا ص= د (س) ، ع= قا (س)

ى = د (س) وهـكـذا ، ..... أذكـر أمثلـة أخـري للـدوال ومتـى مـا تعينـت قيمـة س أمكن إيجاد قيمة ص كما هو موضح في الأمثلة التالية .

مثال (١) :

إذ ا كـان ص = س^{٢} – ٢س + ٤ أوجد قيمة

(i) د (١) ، (ii) د (– ٢) ، (iii) د (١/٢) ، (iv) د (س+١) – د (س)

الحل :

ص = د (س) = س^{٢} –٢س + ٤

(i) لإيجاد د (١) يتم بتعويض س = ١ في الطرفين

د (١) = (١)٢ –٢×١ + ٤ = ٣

(ii) ولإيجاد د (– ٢) يتم بتعويض س = (–٢) في الطرفين

د (–٢) = (–٢)^{٢} – ٢(–٢) + ٤ = ١٢

(iii) ولإيجاد د (١/٢) يتم تعويض س =(١/٢) في الطرفين

د (١/٢) = (١/٢)^{٢} –٢×٢/١ + ٤ = ١/٤ –١+ ٤ = ٤/١ ٣

(iv) ولإيجاد د (س+١) – د(س) نوجد أولا :

د (س+١)٢ –٢ (س+١) + ٤ = س^{٢}+ ٢س + ١– ٢س– ٢ + ٤ = س٢ + ٣ ⟵ (١)

ثم نوجد ثانيا د (س) بتعويض س= س في الطرفين

د (س) = س٢– ٢س + ٤ ⟵ (٢)

د (س+١) – د (س) = (١) - (٢)

= س٢ + ٣ – (س٢ –٢س + ٤) = س٢ + ٣- س٢ + ٢س –٤ = ٢س –١

مثال (٢):

إذ ا كان ص = جتا^{٢}هـ أوجد قيمة د (٤٥$^{\circ}$) ، د (٣٣٠$^{\circ}$) .

الحل :

∵ ص = جتا٢هـ ∴ ص = د (ه) = جتا٢هـ

∴ د (45°) = جتا٢ 45° = (جتا٤٥)^{٢} = ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$)^{٢} = $\frac{١}{٢}$

د (٣٣٠$^{\circ}$) = جتا٢ ٣٣٠ = [جتا (١٨٠×٢- ٣٠)]^{٢} = (جتا٣٠)^{٢} = ($\sqrt{٣}$/٢)^{٢} =٣/٤

هل يمكن أن تقوم بصنع مثالا علي هذا النسق وتقوم بحلة .

القيمـة المحـدودة : وهـى القيمـة الـتى يمكـن أن نجـد أكـبر منهـا و أصـغر منها مثل: ٣ ، - ٢ ، ....

القيمـة غـير المحـدودة : وهـى الـتى لا يمكـن إيجـاد أكـبر منهـا ونرمـز لهـا بـالرمز (∞) وتقـرأ مـا لا نهاية ويمكـن تعريفهـا بالقيمـة (^{أ}/$_{صفر}$) حيـث (أ) ثابت ∴ ^{أ}/$_{صفر}$ = ∞ .

القيمة المعينـة : وهى القيمة التى تنتج من عملية رياضية مثل ^{٢٤}/$_{٦}$ = ٤ ، ....

القيمة غير المعينة : وهـى القيمـة التى لا يمكـن تعينها أو القيمة التى لا معنى لها مثل: ^{صفر}/$_{صفر}$ ، $^{∞}$/$_{∞}$.

مثال (٣):

إذا كان ص = د (س) = $\frac{\text{س٢ –٤}}{\text{س٢ –٢}}$ أوجد قيمة د (٢) .

الحل:

∴ ص = د (٢) = $\frac{\text{٢}^{\text{٢}}\text{ – ٤}}{\text{٢ - ٢}}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، قيمة غير معينة

مثال (٤):

إذا كان ص = د (س) = $\frac{\text{س٢ – ٢س + ٥}}{\text{س}^{\text{٢}}\text{ +٣}}$ أوجد قيمة د (∞) :

الحل :

ص = د (∞) = $\frac{\infty^{\text{٣}}\text{ – ٢ }\infty\text{ + ٥}}{\infty^{\text{٢}}\text{ + ٣}}$ = $\frac{\infty}{\infty}$ قيمة غير معينة

الدالة المعرفة : تكون الدالة معرفة لكل قيم س التى تجعل للدالة قيمة معينة .

الدالة غير المعرفة : وتكون الدالة غير معرفة لكل قيم س التى تجعل الدالة غير معرفة

مثال (٥):

متي تكون الدالة د (س) = $\frac{\text{س٢ – ٨}}{\text{س- ٢}}$ معرفة ومتي تكون غير معرفة.

الحل :

نوجد د (س) عند س = ٢

∴ د (س) = د (٢) = $\frac{\text{٨ - ٨}}{\text{س- ٢}}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، قيمة غير معينة

الدالة غبر معرفة عند س = ١

معرفة لكل قيم س عدا س = ١

تمرين (١.١) :

١/ إذا كان ص = ٥س٢ + س- ٣ ، أوجد قيمة .

(i) د (٢) ، (ii) د (- ٣) ، (iii) د (س+ و) – د (س)

٢/ إذا كان ص = ٢جا٢س ، أوجد قيمة (i) د (45°) ، (ii) د (150°)

٣/ إذا كان د(س) = ٢ظاس + ٣ظا٢س أوجد قيمة د (45°).

٤/ إذا كان د (س) = $\frac{٢}{س}$ ، أثبت أن د(س) – د (س+و) = $\frac{٢و}{س (س+و)}$

٥/ إذا كان د (س) = $\frac{١}{س}$ أوجد قيمة :(i) د (١) (ii) د (١/٢)

٦/ متي تكون الدالة د (س) = $\frac{س^٢ – ٩}{س - ٣}$ معرفة ومتي تكون غير معرفة .

نهاية الدالة

النهاية رياضياً تعنى الاقتراب جدا من قيمة معينة لا الوصول لهذه القيمة أحيانا نعتبر أن نهاية الدالة تساوي هذه القيمة .

فإذا كانت ص = د(س) وكانت ص تقترب من قيمة معينة (ع مثلا) عندما تقترب من قيمة معينة (ك مثلا) .

بحيث يقترب الفرق بين ص و ع من الصفر عندما يقترب الفرق بين س و ك من الصفر نقول في هذه الحالة أن نهاية ص = ع من الصفر عند ما يقترب الفرق بين س و ك من الصفر نقول في هذه الحالة أن نهاية ص= ع عندما تقترب س من ك ونكتب نها ص = ع ولشدة القرب بين س ، ك أحيانا نعتبر س = ك وللدلالة علي ذلك نأخذ المثالين التاليين :

مثال (١):

إذا كانت ص = د(س) = س٢ –١ وهذه الدالة غير معرفة عند س= ١ لماذا لذلك لا يمكن إيجاد قيمتها عند س = ١ أي د (١) لذلك نحاول إيجاد قيمة للدالة عندما يأخذ المتغير س قيما قريبة من العدد ١ بعضها اكبر من العدد ١ وبعضها أصغر منه كما في الجدولين التاليين:

عندما س< ١

س	.٩	.٩٩	.٩٩٩	٩٩٩٩,٠	١ ←
د (س)	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩	٢ ←

عندما س> ١

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١,٠٠٠١	١ ←
د (س)	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢,٠٠٠١	٢ ←

ومن الجدولين أعلاه يتضح أن د(س) تقترب من العدديين (٢) عندما تقترب من العدد (١) ويعبر عن ذلك رياضيا كالآتي :

د (س) ← ٢ عندما س ← ١ ، نها د (س) = ٢ س ← ٢ = ٢ .

وتقرأ نهاية د (س) = ٢ عندما تقترب س من ١ .

مثال (٢):

إذا كانت ص = د (س) = (س + ١) / (س+٤) وكانت س تأخذ القيم ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، .....

(بمعني ستقترب من ∞) فإن قيم ص المناظرة تكون كالآتي :

س	١٠	١٠٠	١٠٠٠	∞ ←
ص	٠,٧٨٦	.٩٧١	٠,٩٩٧	١ ←

بمعني أن ص تقترب من الواحد عندما تقترب س من القيمة ∞ وعلية كتابة هذه العلامة رياضيا كالآتي : نها ص = ١
س← ∞

يمكن أخز دالتين وإيجاد نهايتهما بالطريقتين أعلاه .

قاعدة : لأي داله نهاية عبارة عن قيمة معينة .

طرق إيجاد النهايات :

لإيجاد نها د (س) نفرض أن س = أ ثم نعوض تعويضا مباشرا عن قيمة س في الدالة
س← أ

أي نوجد د (أ) فيكون نتيجة التعويض هي إحدى الحالات الثلاثة الآتية :

الحالة الأولي : (تكون نها الدالة بالتعويض المباشر قيمة معينة) :

مثال (٣): إذا كان ص (٣س٢ – ٢س) / (٥س + ٣) أوجد نها ص .
س←١

الحـل :

$$\because \text{ص} = \frac{\text{٣س٢ – ٢س}}{\text{٥س + ٣}} = \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}}\ \text{ص} = \underset{\text{س} \leftarrow 1}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٣س٢ – ٢س}}{\text{٥س + ٣}}$$

بالتعويض المباشر عن س = ١ في الدالة .

نجد أن د (١) = $\frac{\text{٣} \times (\text{١})^{2} - \text{٢} \times \text{١}}{\text{٥} \times \text{١} + \text{٣}} = \frac{1}{8}$ ، وهي قيمة معينة

الحالة الثانية : (تكون نهاية الدالة بالتعويض المباشر قيمة غير معينة ($\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$))

مثال (٤) :

أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow 2}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س٢ – ٤س + ٤}}{\text{٢س + ٥}}$

بالتعويض المباشر عن س = ٢ في الدالة نجد أن :

$$\text{د (٢)} = \frac{\text{٢٢ – ٤} \times \text{٢ – ٤}}{\text{٢} \times \text{٢ + ٥}} = \frac{\text{٤ – ٨ + ٤}}{\text{٤ + ٥}} = \frac{\text{صفر}}{\text{٩}} = \text{صفر}$$

مثال (٥):

أوجد $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{1}{3}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٣س + ٢}}{\text{٣س – ١}}$

الحل :

بالتعويض المباشر عن س = $^{1}/_{3}$ في الدالة نحصل علي :

$$\text{د (١/٣)} = \frac{\text{٣} \times \frac{1}{3} + \text{٢}}{\text{٣} \times \frac{1}{3} - \text{١}} = \frac{\text{٣}}{\text{صفر}} = \infty$$

الحالة الثانية : (تكون نهاية الدالة بالتعويض المباشر قيمة غير معينة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$):

مثال (٦) : أوجد $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

الحل :

بتعويض س = ٣ في الدالة نحصل علي $\frac{٩ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ ، قيمة غير معينة (لماذا).

وفي هذه الحالة لابد من معالجة هذه الدالة حتى نحصل علي قيمة معينة حسب القاعدة السابقة . لذلك إذا كانت نهاية الدالة ($\frac{صفر}{صفر}$) نتبع الخطوات التالية حتى نحصل علي قيمة معينة للدالة .

(i) التحليل (ii) الاختصار (iii) التعويض .

نرجع لحل المثال السابق لنحصل علي النهاية كقيمة معينة .

$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، نحلل كل من البسط والمقام لأبسط صوره

قاعدة (١): (إذا كان س ← أ ، فإن (س- أ) عامل من عوامل البسط والمقام) وعلية فإن (س- ٣) عامل البسط والمقام لأن س ← ٣ .

∴ $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س + ٣)(س - ٣)}{(س - ٣)}$ ثم نختصر الكميات المتشابهة يتبقى $\lim\limits_{س \to ٣} س + ٣$

"تذكر تحليل الفرق بين المربعين"

ثم نعوض عن س = ٣ فيتكون ناتج النهاية هو ٣ + ٣ = ٦ قيمة معينة .

مثال(٧): أوجد $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ + ٢س - ٣}$

الحل :

بالتعويض المباشر عن س = ١ في الدالة نحصل علي :

$\frac{١ - ٣ + ٢}{١ + ٢ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ ، قيمة غير معينة

نحلل كل من البسط والمقام (س- ١) عامل من عوامل البسط والمقام (لماذا) .

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-١)}{(\text{س}-١)(\text{س}+٣)} \quad \text{ثم نختصر} \Leftarrow \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٣} \quad \text{ثم نعوض س} =$$

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٢}-٣\text{س}+٢}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}-٣} \quad \underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٣} = \frac{١-٢}{١+٣} \quad = -\,^{١}/_{٤}$$

"تذكر تحليل المقدار الثلاثي من الدرجة الثانية "

مثال (٨):

أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٣}-٨}{٢-\text{س}}$

الحل :

بالتعويض المباشر عن س = ٢ في الدالة نحصل علي $\frac{٨-٨}{٢-٢} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ، قيمة غير معينة

∴ نحلل كل من البسط والمقام " لاحظ أن البسط فرق بين مكعبين "

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٣}-٨}{٢-\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٣}-٢^{٣}}{٢-\text{س}} = \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)}{-(\text{س}-٢)}$$

" لاحظ الإشارة السالبة في المقام " (لماذا)

بالتعويض المباشر عن س = ٢ في الدالة

$$\therefore \underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤}{-١} = \frac{٤+٤+٤}{-١} = -١٢$$

مثال (٩):

أوجد $\underset{\text{س}\leftarrow ٢}{\text{نهــا}} \frac{\text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦}{\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٢}$

الحــــل :

بالتعويض المباشر عن س= ١ في الدالة نحصل علي صفر لذلك نحلل ، نختصر ، ثم نعوض هذا المقدار من الدرجة الثالثة نستخدم لتحليلة بنظرية الباقي "راجع نظرية الباقي " كذلك يمكن استخدام القاعدة (١)

∵ س ← ١ فإن س− ١ عامل البسط والمقام وللحصول علي بقية العوامل نستخدم القيمة المطولة .

الناتج: $\text{س}^{٢}+\text{س}-٦$	الناتج: $\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٢$
$(\text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦) \div (\text{س}-١)$	$(\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٢) \div (\text{س}-١)$
بالطرح $\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}$	بالطرح $\text{س}^{٣}-\text{س}^{٢}$
$\text{س}^{٢}-٧\text{س}$	$-٢\text{س}^{٢}+٢$
بالطرح $\text{س}^{٢}-\text{س}$	بالطرح $-٢\text{س}^{٢}+٢\text{س}$
$-٦\text{س}+٦$	$-٢\text{س}+٢$
بالطرح $-٦\text{س}+٦$	بالطرح $-٢\text{س}+٢$
$٠ + ٠$	$٠ + ٠$
$\therefore \text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦ = (\text{س}^{٢}+\text{س}-٦)(\text{س}-١)$	$\therefore \text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٢ = (\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٢)(\text{س}-١)$

$$\therefore \lim_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س}^{٣}-٧\text{س}+٦}{\text{س}^{٣}-٣\text{س}^{٢}+٢} = \lim_{\text{س}\to ١} \frac{(\text{س}^{٢}+\text{س}-٦)(\text{س}-١)}{(\text{س}^{٢}-٢\text{س}-٢)(\text{س}-١)} \quad \text{بالتعويض}$$

$$= \frac{١+١-٦}{١-٢-٢} = \frac{-٤}{-٣} = ٤/٣$$

مثال (١٠):

$$\text{أوجد : } \lim_{\text{س}\to ١} \left(\frac{١}{\text{س}-١} - \frac{٢}{\text{س}^{٢}-١} \right)$$

الحــــل :

أولا : نبسط الدالة $\Leftarrow$ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س+١ -٢}{س٢ - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س-١}{س٢ - ١}$ ثم نعوض س = ١

نحصل علي صفر/صفر قيمة غير معينة

$\therefore$ نحلل ونختصر $\Leftarrow$ $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{س -١}{(س+١)\ (س-١)}$ نحصل علي $\underset{س \leftarrow ١}{نهـا} \frac{١}{س+١}$

ثم نعوض س= ١ نحصل علي $\frac{١}{١+١} = {}^{١}/_{٢}$.

نظرية في النهايات :

$$\boxed{\underset{س \leftarrow أ}{نهـا} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م} (أ)^{ن - م}}$$

مثال (١١):

أوجد $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س٣ - ٨}{س^{٢} - ٤}$

الحـــل :

بالتعويض المباشر نحصل علي $\frac{صفر}{صفر}$ قيمة غير معينة .

$\therefore$ نستخدم النظرية أعلاه : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س^{٢} - ٢^{٢}}$ ، حيث أ = ٢ ، ن = ٣ ، م = ٢

$\therefore \underset{س \leftarrow ٢}{نهـا} \frac{س^{٣} - ٢^{٣}}{س^{٢} - ٢^{٢}} = {}^{٣}/_{٢}\ (٢)^{٣ - ٢} = {}^{٣}/_{٢} \times ٢ = ٢$

مثال (١٢):

أوجد $\lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٣} + ٨}{س^{٧} + ١٢٨}$

الحل :

$$= \lim\limits_{س \to -٢} \dfrac{س^{٣} - (-٢)^{٣}}{س^{٧} - (-٢)^{٧}}$$

" لاحظ تحويل الإشارة بين الحدين إلي إشارة سالبة "

$= \frac{٣}{٧}(-٢)^{٣-٧} = \frac{٣}{٧} \times (-٢)^{-٤} = \frac{٣}{٧} \times \frac{١}{١٦} = \frac{٣}{١١٢}$ ، (راجع الأس)

مثال (١٣):

أوجد $\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س^{٢} - ١٦}{س \sqrt{س} - ٨}$

الحل :

بالتعويض عن س = ٤ في الدالة نحصل علي $\dfrac{٤^{٢} - ١٦}{٤\sqrt{٤} - ٨} = \dfrac{١٦ - ١٦}{٨ - ٨} = \dfrac{صفر}{صفر}$

نستخدم النظرية السابقة لحل هذا المثال وذلك بتحويل النهاية إلي صورة النظرية فتكون :

$\lim\limits_{س \to ٤} \dfrac{س^{٢} - ٤^{٢}}{س^{٣/٢} - ٤^{٣/٢}}$ ، حيث أ = ٤ ، ن = ٢ ، م = $\frac{٣}{٢}$

$\therefore \lim \dfrac{س^{٢} - ٤^{٢}}{س^{٣/٢} - ٤^{٣/٢}} = ٢ \, (٤)^{٢-٣/٢} = \frac{٣}{٤} \times (٢) = \frac{٨}{٣}$

الحالة الثالثة : (إذا كانت نهاية الدالة بالتعويض المباشر قيمة غير معينة (∞/∞)) :

مثال(١٤):

إذا كان ص = $\frac{٣س^{٢} - ٢س + ٥}{٢س + ٧}$ ، أوجد $\lim_{س \to \infty}$ ص

الحل :

بالتعويض المباشر عن س = ∞ نحصل علي: $\frac{٣\infty^{٢} - ٢\infty + ٥}{٢\infty + ٧} = \infty/\infty$

لذلك نحصل على نهاية هذه الدالة كقيمة معينة نقسم كل حد من حدود البسط والمقام علي المتغير المستقل (س) بأكبر قوة في الدالة .

مثال (١٥):

أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} + ٢س - ٧}{٢س^{٢} - س + ٣}$

الحل :

بالتعويض المباشر عن س = ∞ في الدالة نحصل علي:

$$د(\infty) = \frac{٣\infty^{٢} + ٢\infty - ٧}{٢\infty^{٢} - \infty + ٣} = \frac{\infty}{\infty}$$ ، قيمة غير معينة

$\therefore$ قسم كل من البسط والمقام علي س بأكبر قوة في الدالة أي ($س^{٢}$)

$$\therefore \lim_{س \to \infty} \frac{٣س^{٢} + ٢س - ٧}{٢س^{٢} - س + ٣}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣س^{٢}}{٢س^{٢}} + \frac{٢س}{س^{٢}} - \frac{٧}{س^{٢}}}{\frac{س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{س}{س^{٢}} + \frac{٣}{س^{٢}}}$$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣}{٢} + \frac{٢}{س} - \frac{٧}{س^{٢}}}{\frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} - \frac{١}{س} + \frac{٣}{س^{٢}}}$$

$$= \frac{٣ + \frac{٢}{\infty} - \frac{٧}{\infty^{٢}}}{٢ - \frac{١}{\infty} + \frac{٣}{\infty}} = \frac{٣}{٢} + \frac{٠}{٠} - \frac{٠}{٠} = \frac{٣}{٢}$$ (لأن $\frac{أ}{\infty} =$ صفر)

مثـــال (١٦):

أوجد $\lim_{س \to \infty} \frac{٣\,س^{٢} + ٥س - ٢}{٢س^{٣} - س + ٧}$

الحـــل:

بالتعويض المباشر عن س = $\infty \Leftarrow$ د (∞) = $\frac{٣\,\infty + ٥}{٢\infty^{٢} - \infty + ٧} = \frac{\infty}{\infty}$ ، قيمة غير معينة

∴ نقسم كل من البسط والمقام علي س٣ ، (لماذا).

∴ $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س٢ + ٥س - ٢}{٢س٣ - س + ٧}$

$$= \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣س^{٢}}{٢س^{٣}} + \frac{٥س}{س^{٣}} - \frac{٢}{س^{٣}}}{\frac{٢س^{٣}}{س^{٣}} - \frac{س}{س^{٣}} + \frac{٧}{س^{٣}}}$$

$$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{٣}}{\text{س}} + \frac{\text{٥}}{\text{س}^{\text{٢}}} - \frac{\text{٢}}{\text{س}^{\text{٣}}}}{\text{٢} - \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}}} + \frac{\text{٧}}{\text{س}^{\text{٣}}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{٣}}{\infty} + \frac{\text{٥}}{\infty^{\text{٢}}} - \frac{\text{٧}}{\infty^{\text{٣}}}}{\text{٢} - \frac{\text{١}}{\infty^{\text{٢}}} + \frac{\text{٣}}{\infty^{\text{٣}}}} = \frac{\text{صفر}}{\text{٢}} = \text{صفر}$$

مثال (١٧):

أوجد $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣س}^{\text{٤}} + \text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٥}}{\text{٤س}^{\text{٣}} - \text{٣س} + \text{١}}$

الحل:

بالتعويض المباشر عن $\text{س} = \infty$ في الدالة $\Leftarrow \text{د}(\infty) = \frac{\text{٣}\infty^{\text{٤}} + \text{٢}\infty^{\text{٢}} - \text{٥}}{\text{٤}\infty^{\text{٣}} - \text{٣}\infty + \text{١}} = \frac{\infty}{\infty}$

بقسمة كل من البسط والمقام علي $\text{س}^{\text{٤}}$ نحصل علي :

$$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{٣س}^{\text{٤}}}{\text{س}^{\text{٤}}} + \frac{\text{٢س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٤}}} - \frac{\text{٥}}{\text{س}^{\text{٤}}}}{\frac{\text{٤س}^{\text{٣}}}{\text{س}^{\text{٤}}} - \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٤}}} + \frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٤}}}}$$

$$= \underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{٣} + \frac{\text{٢}}{\infty^{\text{٢}}} - \frac{\text{٥}}{\infty^{\text{٤}}}}{\frac{\text{٤}}{\infty} - \frac{\text{٣}}{\infty^{\text{٣}}} + \frac{\text{١}}{\infty^{\text{٤}}}} = \frac{\text{٣}}{\text{٠}} + \frac{\text{٠}}{\text{٠}} - \frac{\text{٠}}{\text{٠}} = \frac{\text{٣}}{\text{٠}} = \infty$$

أي أن الدالة ليس لانهائية

نلاحظ من الأمثلة (١٥) ، (١٦) ، (١٧) ، الآتي :

١- إذا كانت دالة البسط = درجة دالة المقام فإن ناتج النهاية = $\frac{\text{معامل أكبر قوة للمتغير س في البسط}}{\text{معامل أكبر قوة للمتغير س في المقام}}$

كما في المثال (١٥) .

٢- إذا كانت درجة دالة البسط أقل من درجة دالة المقام فإن الناتج = صفر مثال (١٦) .

٣- إذا كانت درجة دالة البسط أكبر من درجة دالة المقام فإن الناتج = ∞ أي إن الدالة ليس لها نهاية كما في مثال (١٧) .

تمرين (١-٢):

أوجد قيمة كل مما يأتي :

١) $\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نها}} \frac{\text{س} + \text{٥}}{\text{س} + \text{٣}}$

٢) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{٢}}{\text{٢س} + \text{٣}}$

٣) $\underset{\text{س}\to\text{١}/\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{٥س} + \text{٣}}{\text{٤س} - \text{٢}}$

٤) $\underset{\text{س}\to\text{صفر}}{\text{نها}} \frac{\text{٣س}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س}}$

٥) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٨}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}$

٦) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{٤}}{\text{س} - \text{٢}}$

٧) $\underset{\text{س}\to\text{٢}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٣س} + \text{٢}}$

٨) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٢س}}{\text{س}^{\text{٢}}(\text{س}^{\text{٢}} + \text{١}) - \text{٣}}$

٩) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٤}} - \text{٣س}^{\text{٢}} - \text{٧}}{\text{س}(\text{٢س}^{\text{٢}} + \text{٥})}$

١٠) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}} \frac{\text{٢س}^{\text{٢}} - \text{٣س} + \text{١}}{\text{٧} - \text{٣س}^{\text{٢}}}$

١١) $\underset{\text{س}\to\sqrt{\text{٣}}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٦}} - \text{٢٧}}{\text{س}^{\text{٤}} - \text{٩}}$

١٢) $\underset{\text{س}\to -\text{٣}}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٢٧}}{\text{س}^{\text{٥}} + \text{٢٤٣}}$

١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{-٥} - ١/٣٢}{\text{س}^{-٣} - ١/٨}$

١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{١/\text{س} - ١/٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$

١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س} - ٣} - \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩}$

الخلاصة :

ستعرضنا في هذه الوحدة :

١. التعريفات الأساسية : الثابت ، المتغير بنوعيه ، الدالة ، القيمة العينة وغير المعينة القيمة المحدودة ، وغير المحدودة ، الدالة المعرفة وغير المعرفة .

٢. نهاية الدالة ، وعرفنا أنه بالتعويض المباشر لقيمة س في الدالة تحصل على إحدى ثلاث حالات الحالة الأولى : تكون نهاية الدالة فيها قيمة معينة .

٣. الحالة الثانية : تكون نهاية الدالة فيها قيمة غير معينة $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وللحصول على نهاية الدالة كقيمة معينة نحلل كل من البسط والمقام ثم نختصر تم نعوض عن قيمة س في الناتج .

٤. الحالة الثالثة : تكون نهاية الدالة فيها قيمة غير معينة $\frac{\infty}{\infty}$ وفي هذه الحالة نقسم كل من البسط والمقام على المتغير المستقل بأكبر قوة في الدالة .

٥. وتعتبر نهاية الدالة مدخل لمعرفة معنى معدل تغير الدالة (التفاضل) .

إجابات تمرينات الوحدة الأول :

تمرين : ١ – ١ :

١/ (i) د(٢) = ١٩ ، (ii) ٣٩ ، (iii) و (١٠س + ٥و + ١) .

٢/ (i) ١ ، (ii) ١/٢

٣/ ٥

٤/ د(س) = $\frac{٢}{س}$ ، د (س + و) = $\frac{٢}{س + و}$ ⟸ د(س) – د(س+ و) = $\frac{٢س + ٢و – ٢س}{س(س+و)}$

= $\frac{٢و}{س(س+و)}$ ، وهو المطلوب .

٥/ (i) صفر (ii) – ٢/١١

٦/ توجد د(١) = د(١) = ٩ – ٩ = صفر ، قيمة غير معنية ∴ الدالة غير معروفة عند س = ١

٣ – ٣ = صفر ، ومعروفة لكل قيمته ، س الحقيقية عدا س = ١

تمرين (١ – ٢)

١/ $\frac{٨}{٦}$ ٢/ صفر ، ٣/ ∞ ، ٤/ – $\frac{١}{٤}$

٥/ ٣ ، ٦/ ٤ ، ٧/ $\frac{٢}{٣}$ ٨/ صفر ، ٩/ ∞ ، ١٠/ – $\frac{٢}{٣}$ ، ١١/ $\frac{٩}{٣}$

١٢/ $\frac{١}{١٥}$ ، ١٣/ ⟵ $\frac{٥}{١٢}$ ، ١٤/ – $\frac{١}{١٦}$ ، ١٥/ – $\frac{١}{١٦}$