١٠-٢-٢ : الوحدة الثانية

التفاضل

تمهيد :

تهدف هذه الوحدة إلى تعريف الطالب بمعنى التفاضل والأسماء المرادفة لهذا المعنى .

فمثلاً : إذا زادت سرعة سيارة من ٦٠كلم/ساعة إلى ٩٠ كلم/ساعة فإن هناك تغيراً في السرعة مقداره ٩٠ – ٦٠ = ٣٠كلم/ساعة وإذا نقصت سرعة سيارة من ٧٠كلم/ساعة إلى ٥٠ كلم/ساعة يقال أن هناك تغيراً مقداره ٥٠-٧٠=- ٢٠كلم/ساعة أي أن التغير في السرعة = السرعة بعد التغير – السرعة الأصلية ويمز للسرعة بالرمز ع والتغير في السرعة بالرمز ∆ع (ويقرأ دلتا ع) .

وتقسم هذه الوحدة إلى :

أ/ التغير .

ب- الأسماء المرادفة للتفاضل هي :

١/ معدل التغير.

٢/ المشتقة الأولى .

أ/ التغـــــــير

تعريف :

التغير هو النقص أو الزيادة في قيمة المتغير وتهدف هذه الوحدة إلى معرفة تغير الدالة الذي يقود بدوره معرفة التفاضل .

مثال (١):

إذا كانت ص=د(س)=س^{٢}+٥س وتغيرت س من ٣ إلى ٧ أحسب قيمة كل من Δ س ، Δ ص .

الحـــل :

التغير في س= Δ س = ٧–٣=٤ وكل تغير س يقابله تغير في ص(لماذا)؟

∴ عند س= ٣ فإن ص = د (٣) = ٣^{٢} + ٥×٣= ٢٤ .

وعند س =٧ فإن ص= د(٧)= ٧^{٢}+٥×٧ =٨٤ .

∴ تغيرت ص تبعاً لتغير س من ٢٤ إلى ٨٤⇐ التغير في ص= Δص=٨٤–٢٤=–٦

تعريف : متوسط معدل تغير الدالة ص بالنسبة إلى س هو النسبة بين Δص إلى Δس

أي أن : متوسط معدل التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

مثال (٢) : إذا كان ص= د(س)= ٢س^{٢} – ٣س أوجد متوسط معدل تغير ص بالنسبة إلى س إذا تغيرت س من ٢إلى ٤ .

متوسط معدل التغير $\frac{\Delta س}{\Delta ص}$. Δس = ٤ –٢=٢

Δص = ء(٤) – ء(٢) .∴ص= ٥س^{٢}- ٣س.∴ ء(٤) = ٥×٤^{٢}- ٣×٤=٦٨.

د(٢)= ٥×٢^{٢} – ٣ × ٢= ١٤ ⇐ Δ ص = و (٤) – ء(٢) = ٨٦ - ١٤ = ٥٤

متوسط معدل التغير = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{٤٥}{٢}$ = ٢٧

مثال (٣) : إذا كان ص = د(س) = س$^{\frac{١}{٢}}$ أوجد متوسط معدل تغير الدالة ص بالنسبة ص بالنسبة إلى س إذا تغيرت س من ٢إلى ٥

الحل :

متوسط معدل تغير ص بالنسبة إلى س = $\frac{\Delta س}{\Delta ص}$

Δ س = ٥ − ٢ = ٣

Δ ص = د (٥) − د (٢) ⇐ د (٥) = $\frac{١}{٢٥}$ = $\frac{١}{٢٥}$، د (٢) = $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$.

∴ Δ ص = $\frac{١}{٢٥}$ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٤ - ٢٥}{١٠٠}$ = $\frac{-٢١}{١٠٠}$

مثال (٤) : إذا كان ص = ٣س^{٢} − ٥ أوجد متوسط معدل تغير ص بالنسبة إلى س

الحل :

متوسط معدل = $\frac{\text{د (س + Δ س) − د (س)}}{\text{Δ س}}$

أولاً : نوجد د (س + Δ س) = ٣ (س + Δ س)^{٢} − ٥

ثانياً : نوجد د (س) = ٣ س^{٢} − ٥

∴ د (س + Δ س) = د (س) = ٣ (س + Δ س)^{٢} − ٥ − (٣س^{٢} − ٥)

٣س^{٢} + ٦س Δ س + ٣ Δ س^{٢} − ٥ − ٣س^{٢} + ٥

= Δ س (٦س + ٣Δ س) .

عموماً إذا كانت ص= د (س) وتغيرت س من القيمة س إلى القيمة س + Δ س

فإن Δ س = س + Δ س − س = Δ س

متوسط معدل التغير = $\frac{\text{Δ ص}}{\text{Δ س}}$ = $\frac{\text{د (س + Δ س) − د (س)}}{\text{Δ س}}$

ب/ معدل التغـــير

تعريف :

معـدل تغـير الدالـة ص بالنـسبة إلى س يـساوي نهاية متوسـط معـدل الـتغير عندما تؤول Δ س إلى صفر ونكتب ذلك رياضياً كالآتي :

$$\text{معدل التغير} = \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \ \underline{\Delta \text{ص}} \ = \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

مثال (١) : أوجد معدل تغير الدالة ص = ٤ $\text{س}^{٢}$ + ٧ بالنسبة إلى س . أوجد قيمته العددية عند س = ٣ .

الحل :

$$\text{معدل التغير} = \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$$

نوجد أولاً : د (س + Δ س) = ٤ $(\text{س} + \Delta \text{س})^{٢}$ + ٧ = ٤ $\text{س}^{٢}$ + ٨س Δس + ٤Δ $\text{س}^{٢}$ + ٧

ثم نوجد د(س) = ٤ $\text{س}^{٢}$ + ٧

∴ د (س + Δ س) – د (س) = ٤ $\text{س}^{٢}$ + ٨ س Δ س + ٤ Δ$\text{س}^{٢}$ + ٧ – (٤$\text{س}^{٢}$ + ٧)

$$\frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \frac{\Delta \text{س} \ (٨\text{س} + ٤ \ \Delta \text{س})}{\Delta \text{س}}$$

$$\therefore \text{معدل التغير} = \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \underset{\Delta \text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} (٨\text{س} + ٤\Delta \text{س})$$

= ٨ س + ٠ = ٨ س .

عند س = ٣ فإن معدل التغير = ٨ × ٣ = ٢٤

يسمى معـدل الـتغير للدالـة ص بالنـسبة إلى س بالمعامـل التفاضلـي الأول للدالـة ص بالنسبة للمتغير س كما يسمى بالمشتقة الأولى للدالـة ص بالنسبة للمتغير س.

٢/ التفاضل (المشتقة الأولى)

تعريف :

التفاضل هو إيجاد المشتقات للدوال بالنسبة لمتغيرات المستقلة فيها ويرمز للتفاضل بالرمز دس/د ويعني إجراء عمليات التفاضل لما بعده بالنسبة للمتغير س وعلى ذلك فإن دس/د (ص) يعني تفاضل ص بالنسبة إلى ، $\frac{\text{ء}}{\text{ءِ}}$ (ف) يعني تفاضل ف بالنسبة إلى ن أو معدل تغير ف بالنسبة إلى ن .

ويمكن أن نستخدم لمعدل التغير الرمز $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ أو $\frac{\text{ء}}{\text{ءِ}}$ [د (س)] أَ، صً ، دَ (س) أ ص١ .

ولعلك لاحظت أن المشتقة الأولى تقل درجة واحدة عن درجة الدالة (فإذا كانت الدالة من الدرجة الثانية فإن المشتقة الأولى تكون من الدرجة الأولى وهكذا ...)

تمرين (٢ – ١)

١. أوجد متوسط معدل تغير الدوال التالية :

I. ص = ٣ س^{٢} + ٤ إذا تغيرت س من ٢إلى ٥

II. ص = س$^{\frac{١}{٢}}$ إذا تغيرت س من ١ إلى ٣

٢. أوجد معدل تغير الدالة ص = ٥س^{٢} + ٣ إذا تغيرت س من س إلى س + Δ س .

٣. أوجد معدل تغير مساحة الدائرة بالنسبة لنصف قطرها . (م = Π نق^{٢}).

إجابات التمرين :

(٢ – ١) ١. (I) ٢١   (II) – $\frac{٤}{٩}$

٢. ١٠ س

٣. ٢Π نق

(٢- ٢) إيجاد المشتقة الأولى للدالة من المبادئ الأولية

لإيجاد المشتقة الأولى للدالة من المبادئ الأولية نستخدم القانون :

معدل التغير = $\underset{\Delta \text{س} \to}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$

وذلك بإتباع الخطوات التالية :

(١) نوجد أولاً د (س + Δ س) (٢) نوجد د (س) (٣) نوجد د (س +Δ س) – دس

(٤) نقسم الناتج من ٣ على Δ س (٥) نوجد $\underset{\Delta \text{س} \to}{\text{نهــا}}$

مثال (٦) إذا كان ص = د(س) = ٣س^{٢}+ ٢ أوجد من المبادئ الأولية $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ وأوجد قيمتها عند س = ٢

الحل :

$\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ من المبادئ الأولية = $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$

(١) نوجد د (س + Δ س) = ٣ (س + Δ س)^{٢}+٢ = ٣س^{٢} + ٦س Δ س

(٢) نوجد د (س) = ٣ س^{٢} + ٢ (٣) نوجد د (س + Δ س) – د (س) =

٣س^{٢} + ٦ س Δ س + ٣ Δ س^{٢} + ٢ – (٣س^{٢} +٢)

(٤) $\dfrac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}} = \dfrac{\Delta \text{س}\,(٦\text{س} + ٣\,\text{س}\,\Delta \text{س})}{\Delta\,\text{س}}$ ، باستخراج Δ س مشترك عامل مشترك في البسط

(٥) $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$ = ٦س + ٣ × صفر = ٦س

عند س = ٢ فإن $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٦ × ٢ = ١٢

مثال (٧) : أوجد من المبادئ الأولية المشتقة الأولى للدالة **ص= س**$^{\frac{١}{٢}}$.

الحل :

المشتقة الأولى من المبادئ الأولية = $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\text{د}(\text{س} + \Delta \text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta \text{س}}$

$$\text{د}(\text{س}+\Delta\text{ص}) = \frac{1}{(\text{س}+\Delta\text{س})} \quad . \quad \text{د}(\text{س})\ \text{س}^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore\ \text{د}(\text{س}+\Delta\text{ص}) - \text{د}(\text{س}) = \frac{1}{(\text{س}+\Delta\text{س})} \quad . \quad \text{د}(\text{س})\ \text{س}^{\frac{1}{2}}$$

نوجد القاسم المشترك الأعظم لمقامي الكسرين: $\frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{(\text{س}+\Delta)^{2}}$

$$\frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{(\text{س}+\Delta\text{س})^{2}\text{س}^{2}}$$

$$\therefore\ \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}} = \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{س}^{2} - (\text{س}+\Delta\text{س})^{2}}{(\text{س}+\Delta\text{س})^{2}\text{س}^{2}\Delta\text{س}}$$

(البسط فرق بين مربعين)

$$= \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{(\text{س}+\text{س}+\Delta\text{س})(\text{س}-\text{س}-\Delta\text{س})}{(\text{س}+\Delta\text{س})^{2}\text{س}^{2}\Delta\text{س}}$$

$$= \lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{(2\text{س}+\Delta\text{س})(-\cancel{\Delta\text{س}})^{-1}}{(\text{س}+\Delta\text{س})^{2}\text{س}^{2}\cancel{\Delta\text{س}}}$$ ، نعوض $\Delta \to 0$ نحصل على

$$\frac{-2\text{س}}{\text{س}^{2}\times\text{س}^{2}} = \frac{-2}{\text{س}^{3}} \ .$$

مثال (٨) : أوجد من المبادئ الأولية المعامل التفاضلي الأولي للدالة : $\text{ص} = \frac{1}{\sqrt{\text{س}^{3}}}$

الحل :

المعامل التفاضلي الأول للدالة = $\lim_{\Delta\text{س}\to 0} \frac{\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}}$

$\text{د}(\text{س}+\Delta\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{(\text{س}+\Delta\text{س})^{3}}}$ ، $\text{د}(\text{س}) = \frac{1}{\sqrt{\text{س}^{3}}}$

$$\therefore\ د(س + \Delta س) - د(س) = \frac{١}{\sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}} - \frac{١}{\sqrt{س^{٣}}}$$

بإيجاد القاسم المشترك الأعظم لمقامي الكسرين :

$$\therefore\ د(س + \Delta س) - د(س) = \frac{\sqrt{س^{٣}} - \sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}}{\sqrt{(س + \Delta س)^{٣}} \times \sqrt{س^{٣}}}$$

بالضرب في مرافق بسط الطرف الأيسر والقسمة على Δ س للطرفين وإيجاد النهاية عندما Δ س $\leftarrow$ ٠ نحصل على

$$= \underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهـا}\ س = \frac{د(س + \Delta س) - د(س)}{\Delta س} =$$

$$\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهـا}\ س = \frac{\left(\sqrt{س^{٣}} - \sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\right)\left(\sqrt{س^{٣}} - \sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\right)}{\sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\sqrt{س^{٣}}\left(\sqrt{س^{٣}} + \sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\right)\Delta س}$$ لاحظ البسط

تحليل فرق بين مربعين .

$$\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهـا}\ س = \frac{(س - س - \Delta س)^{٣}}{\sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\sqrt{س^{٣}}\left(\sqrt{س^{٣}} + \sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\right)\Delta س}$$ البسط فرق بين

مكعبين .

$$\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهـا}\ س = \frac{(س - س - \Delta س)\left[س^{٢} + س(س + \Delta س) + (س + \Delta س)^{٢}\right]}{\sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\sqrt{س^{٣}}\left(\sqrt{س^{٣}} + \sqrt{(س + \Delta س)^{٣}}\right)\Delta س}$$

$$= \frac{(س - س - \Delta س)\left[س^{٢} + س(س + \Delta س) + (س + \Delta س)^{٢}\right]}{}$$

$$\sqrt{س^{3}} \times \sqrt{س^{3}} + \left(\sqrt{س} + \sqrt{(س)^{3}} \right) \Delta س$$

$$= \frac{-3س^{2}}{س^{3} \times 2\sqrt{س^{3}}} = \frac{-3}{2\sqrt{س^{5}}}$$

تمرين (٢ – ٢) :

(١) أوجد من المبادئ الأولية المعامل التفاضلى الأول للدالة ص = ٢س^{٢} + ٣

(٢) أوجد من المبادئ الأولية المعامل التفاضلى للدالة ص = ١/س

(٣) أوجد المشتقة الأولى للدالة ص = $\sqrt{س}$ من المبادئ الأولية

(٤) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ من المبادئ الأولية للدالة ص = $\frac{١}{\sqrt{س}}$

(٥) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ للدالة ص = ٣س^{٢} – ٢س + ٥ من المبادئ الأولية .

إجابات التمرين (٢–٢) :

(١) ٤س

(٢) $س^{\frac{١}{٢}}$

(٣) $\frac{١}{\sqrt{س}}$

(٤) $\frac{-١}{٢\sqrt{س^{٣}}}$

(٥) ٦ س – ٢

(٢–٣) بعض قوانين التفاضل

درسنا في الدرس السابق كيفية إيجاد المشتقة الأولى للدالة من المبادئ الأولية ولابد أن الطالب قد لا حظ أن إيجاد المشتقة الأولى بهذه الطريقة يأخذ كثيراً من الوقت لذلك فكر علماء الرياضيات في وضع نظريات تسهل إيجاد المشتقة الأولى ومن هذه النظريات :

المشتقة الأولى للدالة ص = $\text{س}^{\text{ن}}$

قانون (١) : إذا كان ص = $\text{س}^{\text{ن}}$ حيث ن عدد صحيح أو كسر موجب أو سالب

فإن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{\text{ن}}) = \text{ن س}^{\text{ن}-١}$.

البرهان : يمكن إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ من المبادئ الأولية كالآتي :

$$\because \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underset{\Delta\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{س} = \frac{\text{ء}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{ء}(\text{س})}{\text{ء س}}$$

$$\text{ء}(\text{س}+\Delta\text{س}) = (\text{س}+\Delta\text{س})^{\text{ن}}\ \text{،}\ \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{ء}(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{د}(\text{س})}{\Delta\text{س}} = \frac{(\text{س}+\Delta\text{س})^{\text{ن}} - (\text{س})^{\text{ن}}}{\Delta\text{س}}$$

يأخذ نهايتي الطرفين عندما Δ س $\to$ ٠

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underset{\Delta\text{س}}{\text{نهـا}}\ \text{س} = \frac{(\text{س}+\Delta\text{س})^{\text{ن}} - (\text{س})^{\text{ن}}}{\Delta\text{س}}$$ (وبإضافة س وطرح

نحصل على :

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \underset{\text{س}+\Delta\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \text{س} = \frac{(\text{س}+\Delta\text{س})^{\text{ن}} - (\text{س})^{\text{ن}}}{(\text{س}+\Delta\text{س}) - \text{س}}$$ وبتطبيق نظرية النهايات

($\underset{\text{س}\to\text{أ}}{\text{نهـا}} = \frac{(\text{س}^{\text{ن}} - \text{م}^{\text{ن}})}{\text{س}^{\text{م}} - \text{م}^{\text{م}}}$ نحصل على :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{ن س}^{\text{ن}-١}$ وهو المطلوب إثباته

دس

مثال (١) :

إذا كان ص = $\text{س}^{٥}$ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الحل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٥\ \text{س}^{٥-١} = ٥\ \text{س}^{٤}$$

مثال (٢) :

إذا كان ص = $\text{س}^{\frac{١}{١٢}}$

الحل :

$$\text{ص} = \text{س}^{-١٢} \quad \therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -١٢\text{س}^{-١٢-١} = -١٢\text{س}^{-١٣}$$

مثال (٣) : إذا كان ص = $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

الحل :

$$\text{ص} = \text{س}^{-\frac{١}{٢}} \Leftarrow \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{١}{٢}-١} = -\frac{١}{٢}\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} = \frac{-١}{٢\sqrt{\text{س}^{٣}}}$$

نتائج :

إذا كان ص = $\text{أ}\text{س}^{\text{ن}}$ (حيث أ ثابت) فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = أن $\text{س}^{\text{ن}-١}$

ويمكن إثبات ذلك كالآتي :

$\because \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}(\text{س}^{\text{ن}}) = \text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-١}$ $\because$ م ثابت ولا تتأثر قيمته أثناء العملية الرياضية كما سبق تعريفه يمكن استخراج الثابت خارج رمز التفاضل كالآتي $\text{د}/_{\text{دس}}$ $(\text{أ}\text{س}^{\text{ن}})$

$$\text{أ} = {\text{د}}/_{\text{دس}}\ (\text{س}^{\text{ن}}) = \text{أ}\ (\text{ن}\ \text{س}^{\text{ن}-١})$$

مثال (٤) :

إذا كان ص = ٥ س^{٨} أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٥×٨ س$^{٨-١}$ = ٤٠ س^{٧} .

مثال (٥) :

أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان ص = $\frac{٢}{٣}$ س$^{-٤}$

الحـــل :

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{٢}{٣}$ × –٤$^{-٢}$ — س$^{-٤-١}$ = –٦ س$^{-٥}$

مثال (٦) : إذا كان ص = $\frac{٤}{\sqrt{س}}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحـــل :

نجعل الدالة في صورة قياسية وذلك بتحويل الجذر في البسط إلى أس في المقام

∴ ص = ٤س$^{-\frac{١}{٢}}$ ∴ $\frac{د}{دس}$ (٤س$^{-\frac{١}{٢}}$) = ٤ × –$\frac{١}{٢}$ –١ = –٢س$^{-\frac{٣}{٢}}$

نتيجة (٢) إذا كان ص = س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ١ وإذا كان ص = أس فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = أ

فمثلاً إذا كان ص = ٥س فإن $\frac{ءص}{ءس}$ = ٥ (يمكنك إثبات ذلك)

نتيجة (٣) : إذا كان ص = أ (حيث أ ثابت فإن $\frac{د}{دس}$ (أ) = صفر (يمكنك إثبات ذلك) أي أن تفاضل الثابت لوحده (الذي ليس معاملاً لمقدار) = صفر

فمثلاً : $\frac{د}{دس}$ (٣) = صفر ، $\frac{د}{دس}$ (جـ) حيث هـ ثابت = صفر

لكن $\frac{د}{دس}$ (٣ س^{٢}) ≠ صفر ×٢س بل يساوي ٣ × ٢س = ٦س (لماذا)

المشتقة الأولى لمجموع أو فرق عدة دوال في متغير مستقل واحد :

قانون (٢) :

إذا كان ص = ف ± ع ± ق ± ل ± .... ± م حيث ف ، ع ، ق ، ل ، م . دوال في المتغير س فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د}{دس}ف \pm \frac{د}{دس}ع \pm \frac{د}{دس}ق \pm \frac{د}{دس}ل \pm .... \frac{د}{دس}م$

أي أن التفاضل المجموع الجبري لعدة دوال في متغير مستقل واحد يساوي المجموع الجبري لتفاضلات هذه الدوال :

فمثلاً إذا كان ص = $٣س^٢ - ٢س + ٥$

فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{د}{دس}(٣س^٢) - \frac{د}{دس}(٢س) + \frac{د}{دس}(٥)$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٦س - ٢ + صفر = ٦س - ٢$

مثال (٧) : أوجد $\frac{ء}{دس}\left(\frac{٨}{\sqrt{س}} - \sqrt{٤س}\right)$

الحل :

$= \frac{ءص}{ءس}\left(٨ س^{-\frac{١}{٢}} - \frac{د}{دس}(٤س^{\frac{١}{٢}})\right) = -٤س^{-\frac{٣}{٢}} - ٢س^{-\frac{١}{٢}} = \left(\frac{٤}{\sqrt{س^٣}} + \frac{٢}{\sqrt{س}}\right)$

مثال (٨) : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كان ص = $(س - \frac{١}{س})^٢$

الحل :

أولاً : نفك القوس $\therefore$ ص = $س^٢ - ٢س \times \frac{١}{س} + (\frac{١}{س})^٢$ (لعلك تذكر فك المربع الكامل)

$\therefore ص = س^٢ - ٢ + س^{\frac{١}{٢}} \Leftarrow ص = س^٢ - ٢ + س^{-٢}$

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{د}{دس}(س^٢) - \frac{د}{دس}(٢) + \frac{د}{دس}(س^{-٢})$

$\frac{ءص}{ءس} = ٢س - صفر - ٢س^{-٣}$

(في الإجابة النهاية لابد أن نحول الأس السالب إلى أس موجب)

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = ٢س - س^{\frac{٢}{٢}}.$

مثال (٩) : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ للدالة ص = $\frac{١}{٣}\text{س}^{٩} - \frac{٢}{٧}\text{س}^{٢١} + \frac{١}{٢}\text{س}^{-٦}$

الحل :

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٣}\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٩}) - \frac{٢}{٧}\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٢١}) + \frac{١}{٢}\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{-٦})$$

$$= ٣\text{س}^{٨} - ٦\,\text{س}^{-٢} - ٣\text{س}^{-٧} = ٣\text{س}^{٨} - \frac{٦}{\text{س}^{٢}} - \frac{٢}{\text{س}^{٧}}$$

مثال (١٠) أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان ص = $\frac{٢\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٤}{٣}$

الحل :

أولاً نوزع المقام على البسط هكذا : ص = $\frac{٢\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٢}}{٣} + \frac{٤}{٣}$

ثم نجري عملية التفاضل :

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣}\text{س} + \text{صفر} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٢\text{س}^{٢} - \frac{٢}{٣}\text{س}$.

تمـرين (٢- ٣) :

أوجد المعامل التفاضلي الأولي للدوال التالية بالنسبة للمتغير المستقل فيها

١. $\text{ص} = \text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢}$.

٢. $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ٢\text{س} - \text{س}^{١/٣}$

٣. $\text{ص} = \left(\text{س}٢ + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٢}$

٤. $\text{ف} = \text{أن} + \frac{١}{٢}\ \text{ن ن}^{٢}$ (حيث أ ، ب ثوابت)

٥. $\text{ص} = ٥\text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٣} + ٤$

٦. $\text{ص} = (\sqrt{\text{س}} + ١)(\sqrt{\text{س}} + ٥)$.

٧. $\text{ف} = \frac{١}{\sqrt{\text{ن}}} + ٤\text{ن}^{٢} - \sqrt[٤]{\text{ن}}$

٨. $\text{ع} = ٣\text{هـ}^{١/٣} - \frac{١}{٤}\text{س}^{-٣}$

٩. $\text{ص} = \frac{٣\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٦} + ٧}{٣}$

١٠. $\text{ص} = \frac{٨}{\sqrt{\text{س}}} + \sqrt[٤]{\text{س}}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س $= ٤$

١١. $\text{ص} = (\text{س} + \sqrt{٣})(\sqrt{\text{س}} - ٢)$

١٢. $\text{ص} = ٥\text{أ س}^{-١/٥} + ٣\text{ن س}^{٢} - ١٢\text{جـ}^{-١/٣}$ (حيث أ ، ب ، جـ ثوابت)

إجابات التمرين (٢- ٣)

(١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢} + \text{١٠س}$

(٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٤س}^{٣} + ٢ + \text{س}^{٤/٣}$

(٣) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٤} + ٢ + \text{س}^{٤/٣}$

(٤) $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = \text{أ} + \text{ب ن}$

(٥) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٢٠س}^{٣} + \text{٦س}$

(٦) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ + \frac{٣}{\sqrt{\text{س}}}$

(٧) $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -\frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}^{٣}}} + \text{٨ن} - \frac{١}{٤\sqrt[٤]{\text{ن}^{٣}}}$

(٨) $\frac{\text{دع}}{\text{دهـ}} = \text{هـ}^{٢} + \text{٤س}^{٤/٢}$

(٩) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{٣س}^{٢} - \text{٤س}^{٥}$

(١٠) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\frac{٤}{\sqrt{\text{س}^{٣}}} + \frac{٢}{\sqrt{\text{س}}} = -\frac{٤}{\sqrt{٤^{٣}}} - \frac{٢}{\sqrt{٤}} = \frac{١}{٢}$

(١١) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣\sqrt{\text{س}}}{٢} - ٢ + \frac{٤}{٢\sqrt{\text{س}}}$

(١٢) $\frac{\text{دف}}{\text{دن}} = -\frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}^{٣}}} + \text{٨ن} - \frac{١}{٤\sqrt[٤]{\text{ن}^{٣}}}$

(٢- ٤) المشتقة الأولى لحاصل ضرب والقيمة في متغير مستقل واحد

قانون (٣) إذا كان ص = ع × ل حيث ع ، ل والتعين في المتغير س .

فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ع ل) = ع $\frac{\text{دل}}{\text{دس}}$ + ل $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$.

ويمكن القول ان تفاضل ضرب والتعين في متغير مستقل واحد

= الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول

البرهــان :

إذا كــان ص = ع × ل (حيــث ع ، ل والقيمــة في المــتغير س) أوجـد مـن المبـادئ الأولية $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

إذا تغيرت س إلى س + Δ س ، فإن ع تتغير إلى ع + Δع ، ا تتغير إلى ل + Δ ل وص تتغير إلى ص + Δ ص .

∴ ص + Δ ص = (ع + Δع) (ل + Δ ل) أي :

ص + Δص = ع ل + ع Δ ل + ل Δ ع + Δ ع Δ ل ← (١)

لكن ص = ع ل ← (٢) وبإجراء العملية : (١) – (٢) نحصل على

Δ ص = ع ل + ع Δ ل + ل Δ ع + Δ ل Δ ع – ع ل

Δ ص = ع Δ ل + ل Δ ع + Δ ل Δ ع وبقسمة الطرفين على Δ س

∴ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = ع $\frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{س}}$ + ل $\frac{\Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}}$ + $\frac{\Delta \text{ل} \Delta \text{ع}}{\Delta \text{س}}$

ويأخذ نهايتي الطرفين عندما Δ س ← ٠ فإن Δع ← ٠ ، Δل ← ٠

∴ = نهـا$_{\Delta \text{س} \to ٠}$ $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = ع نهـا$_{\Delta \text{س} \to ٠}$ $\frac{\Delta \text{ل}}{\Delta \text{س}}$ +

ولعلك تذكر أن ∴ $= \lim\limits_{\Delta \text{س} \to 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ع} \frac{\text{دل}}{\text{دس}} + \text{ل} \frac{\text{دع}}{\Delta \text{س}} + \text{صفر} \left(\frac{\text{دع}}{\text{دس}}\right)$ (لأن Δ ل $\leftarrow 0$)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{ع} \frac{\text{دل}}{\text{دس}} + \text{ل} \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$	أي $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ع ل) $= \text{ع} \frac{\text{دل}}{\text{دس}} + \text{ل} \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

وباعتبار أن ع هي الدالة الأولى ل هي الثانية فإن تفاضل ضرب والقيمة = الدالة الأولى في تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية × تفاضل الدالة الأولى .

مثال (١١) إذا كان ص = (س٢ + ٣س) (س٣ – ٢س) أوجد دص/دس .

الحل :

يوضع ع = $\text{س}^{2} + 3\text{س}$ ، ل = $\text{س}^{3} - 2\text{س}$ ⇐ $\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = 2\text{س} + 3$ ، $\frac{\text{دل}}{\text{دس}} = 3\text{س}^{2} - 2$

∵ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ (ع ل) $= \text{ع} \times \frac{\text{دل}}{\text{دس}} + \text{ل} \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$.

∴ $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{2} + 3\text{س})(\text{س}^{3} - 2\text{س}) = (\text{س}^{2} + 3\text{س}) + (\text{س}^{3} - 2\text{س})(2\text{س} + 3)$ نفك الأقواس وتجمع الحدود المتشابهة :

$= 3\text{س}^{3} - 2\text{س}^{2} + 9\text{س}^{2} + 6\text{س} + 2\text{س}^{4} + 3\text{س}^{3} - 4\text{س}^{2} - 6\text{س}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = 2\text{س}^{4} + 6\text{س}^{3} + 3\text{س}^{2} - 12\text{س}$

مثال (١٢) : إذا كان ص = $(3\text{س}^{2} - 2\text{س} + 5)^{2}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

لاحظ أنه يمكن كتابة المربع الكامل كحاصل ضرب مقدارين في بعضهما كالآتي :

ص = (٣س٢ – ٢س + ٥) (٣س٢ - ٢س +٥) . وتحولت الدالة بذلك إلى حاصل ضرب القيمة .

∵ $\frac{د}{دس}$ (ع ل) = ع $\frac{دل}{دس}$ + ل $\frac{دع}{دس}$

∴ $\frac{د}{دس}$ (٣س^{٢} – ٢س + ٥) (٣س^{٢} - ٢س +٥) = (٣س^{٢} - ٢س +٥)(٦س-٢) + (٣س^{٢} - ٢س + ٥) (٦س - ٢)

= ١٨س^{٣}- ١٢س^{٢}+٣٠س– ٦س^{٢}+٤س–١٠+١٨س^{٣}- ١٢س^{٢}+٣٠س– ٦س٢ +٤س – ١٠

= ٣٦س^{٣} – ٣٦س^{٢} + ٦٠س + ٦٨س - ٢٠

بكثرة المران يمكن إيجاد حاصل ضرب القيمة بالتطبيق المباشر للنظرية المشتقة الأولى لحاصل قسمة دالتين في متغير مستقل واحد :

> **نظرية (٤) :**
>
> إذا كان (ص) = $\frac{ع}{ل}$ حيث ع ، ل دالتين في متغير س فإن :
>
> $\frac{د}{دس}$(ص) = $\frac{ل \frac{دع}{دس} - ع \frac{دل}{دس}}{ل^{٢}}$ أي $\frac{د}{دس}$ ($\frac{ع}{ل}$) = $\frac{ل \frac{دع}{دس} - ع \frac{دل}{دس}}{ل^{٢}}$

يمكن إعتبار برهان هذا القانون كما سبق في ضرب والقيمة وباعتبار أن ع هي دالة البسط ، ل دالة المقام فإن تفاضل قسمة دالتين =

$$\frac{\text{المقام × تفاضل البسط – البسط × تفاضل المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال (١٣) إذا كان ص = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

$$\because \quad \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{ع}}{\text{ل}}\right) = \frac{\text{ل}\,\frac{\text{دع}}{\text{دس}} - \text{ع}\,\frac{\text{دل}}{\text{دس}}}{\text{ل}^{٢}}$$

بوضع ع = س + ٢ ، ل = س − ١

$$\therefore \quad \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{س}+٢}{\text{س}-١}\right) = \frac{(\text{س}-١)\times ١ - (\text{س}+٢)\times ١}{(\text{س}-١)^{٢}} = \frac{\text{س}-١-\text{س}-٢}{(\text{س}-١)^{٢}} = \frac{-٣}{(\text{س}-١)^{٢}}$$

مثال (١٤) : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}+١}{١-\text{س}^{٢}}$

الحل :

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{س}^{٢}+٢}{١-\text{س}^{٢}}\right) = \frac{(١-\text{س}^{٢})(٢\text{س}) - (\text{س}^{٢}+١)\times(-٢\text{س})}{(١-\text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{٢\text{س} - ٢\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٣} + ٢\text{س}}{(١-\text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{٤\,\text{س}}{(١-\text{س}^{٢})^{٢}}$$

مثال (١٥) : إذا كان $\text{ص} = \frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}+٢}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل :

$$\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\frac{\text{ك}}{\text{س}^{٢}+٢}\right) = \frac{(\text{س}^{٢}+٢)\times \text{صفر} - \text{ك}\times ٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٢)^{٢}} = \frac{-٢\text{ك}\,\text{س}}{(\text{س}^{٢}+٢)^{٢}}\ .$$

تمرين (٢- ٤) :

أوجد $\frac{دص}{دس}$ للدوال التالية :

١. ص = (٣س^{٢} — س) (س^{٣} + ٢س)

٢. ص = (س$^{٣/٢}$ — س$^{١/٢}$) (س^{٣} — ٢س)

٣. ص = (س$^{١/٢}$ - س$^{-٣/٢}$) (س$^{٧/٢}$ + س$^{٣/٢}$ + ٢س$^{-١/٢}$)

٤. ص = ($\sqrt{س}$ + $\sqrt{٣}$)^{٢}

٥. ص = $\frac{٥}{س^{٢} + ٣س}$

٦. ص = $\frac{س^{٢}}{س^{٣} + ٢}$

٧. ص = $\frac{س^{٢} + ٢س - ١}{س^{٢} + س^{٣}}$

٨. ص = $\frac{س^{٢} + أ}{أ - س^{٢}}$

إجابات تمرين (٢- ٤) :

١. دص/دس = ١٥س^{٢} + ١٨س^{٢} — ٤س^{٣} — ٤س .

٢. دس/دص = ٣ — ١٤س + ٦س^{٢}

٣. دس/دص = ٤س٣ + س٣/^{٤}

٤. دس/دص = ١ + $\sqrt{\frac{٣}{س}}$

٥. دس/دص = $\frac{٤س + س^{٢}}{(س^{٢} + ٣س)^{٢}}$

٦. دس/دص = $\frac{٤س + س^{٤}}{(س^{٢} + ٢)^{٢}}$

٧. $\frac{س\ (س^{٣}\ ٤س^{٢} + ٥\ س + ٢)}{(س^{٢} + س^{٢}\ )^{٢}}$

(٢- ٥) المشتقة الأولى لدالة الدالة (الدالة المركبة)

تعريف : دالة الدالة هي دالة في المتغير س مرفوعة لأس : مثل $(٢س + ٣)^{٧}$ أي $[(دس)]^{ن}$

الحل :

بفك الأقواس نحصل على : $ص = ٤س^{٤} + ٢٠ س^{٢} + ٢٥$

$\therefore \frac{دص}{دس} = ١٦ س٤ + ٤٠س$

لكـن إذا كانـت $ص = (٢س^{٢} + ٥)^{٩}$ فلإيجـاد $\frac{دص}{دس}$ لابـد مـن اسـتخدام نظريـة ذات الحـدين لفـك هـذا المقـدار وبذلك تحتـاج هـذه العمليـة لوقـت طويـل ، لكن يمكن حل هذا المثال بالطريقة التالية :

$\because ع = (٢س^{٢} + ٥)^{٩}$ ، بغرض أن $ع = ٢س^{٢} + ٥$ ومن هـذه الدالـة نجـد أن : $\frac{دع}{دس} = ٤س \leftarrow (١)$

$\because ع = ٢س^{٢} + ٥$. $ص = (٢س^{٢} + ٥)٩$ $\therefore ص = ع^{٩}$ ومـن هـذه الدالـة نجـد أن : $\frac{دع}{دس} = ٩ع^{٨} \leftarrow (٢)$.

ومن هنا سميت ص (دالة دالة أو دالة مركزية) .

لأن ص دالة في ع ، ع دالة في س (فرضاً) .

$\therefore$ من (١) ، (٢) يمكـن إيجاد $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$ والطرف الأيسر جبرتا = $\frac{دص}{دس}$.

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٩ع^{٨} \times ٤س = ٩(٢س^{٢} + ٥)٨ \times ٤س = ٣٦س (٢س^{٢} + ٥)^{٨}$.

$\therefore \frac{د}{دس}$ [(٢س٢ + ٥)] = ٩(٢س٢ + ٥)٨ (٤س) . ومن هذا المقابل يمكن استنتاج القاعدة التالية :

$\frac{د}{دس} [د (س)^{ن}] = ن[د(س)]^{ن-١} \times د (س)$

أي تفاضل دالة الدالة = الأس (الدالة) الأس - ١ × تفاضل الدالة .

فمثلاً $\frac{د}{دس}\sqrt{س٢ + ٢س}$ = $\frac{د}{دس}$ (س٢ + ٢س)١/٢ = $\frac{س + ١}{\sqrt{س٢ + ٢س}}$

لاحظ أننا جمعنا الإجابة النهائية في صورة أس موجب .

مثال (١٦) : أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة ص = $(٢س^{٢} - ٣س + ١)^{١٥}$

الحل :

∴ $\frac{د}{دس}$ [(س)]^{ن} = ن [د (س)]$^{ن-١}$ × دَ (س)

حيث ن = ١٥ ، دَ(س) = (٢س٢ – ٣س +١) ، دَ (س) = ٤س - ٣

∴ $\frac{د}{دس}$ (٢س٢ – ٣س + ١)١٥ (٢س٢ – ٣س +١)١٤ (٤س – ٣) =

(٦٠س- ٤٥) ($٢س^{٢} - ٣س + ١)^{١٤}$

مثال (١٧) : أوجد $\frac{د}{دس}$ [$\frac{(س^{٢} + ٣)^{٣}}{(٢س - ١)^{٢}}$]

الحل :

البسط عبارة دالة والمقام كذلك .

تفاضل دالة البسط = $٣(س^{٢} + ٣)^{٢}$ × ٢س = ٦س $(س^{٢} + ٣)^{٢}$

تفاضل دالة المقام = ٢(٢س – ١) ×٢ = ٨س – ٤ ثم نطبق قانون

قسمة دالتين:

$\frac{د}{دس}$ (ع/ل) = $\frac{ل\frac{دع}{دس} - ع\frac{دل}{دس}}{ل^{٢}}$

∴ $\frac{د}{دس}$ [$\frac{(س^{٢} + ٣)^{٣}}{}$] = $\frac{(٢س - ١)^{٢} × ٦س (س^{٢} + ٣)^{٣}(٨س - ٤)}{}$

(٢س − ١)^٢ (٢س − ١)^٤

باستخراج (٢س - ١)(س^٢ + ٣)^٢ قاسم مشترك

= (٢س^٢ - ١) (س^٢ + ٣)^٢ [٦س (٢س - ١) - ٤(س^٢ + ٣)]
/ (٢س − ١)^٤

= (٢س^٢ + ٣)٢ (٨س^٢ − ٦س - ١٢
/ (٢س − ١)^٣

تمرين (٢- ٥)

١. أوجد دص/دس للدالة : ص = (٣س^٤ + ٢س +٣)^٧

٢. أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة :

ص = √(٢س^٢ + ٣س − ١)

٣. إذا كان ص = س √(س + ١) أوجد دص/دس :

٤. أوجد دس/دص إذا كان

ص = √(١ + √س)

٥. ص = (١ + √س)^٩

إجابات تمرين (٢- ٥) :

١. ٧ (١٢س^٣ + ٢) (٣س^٤ + ٢س + ٣)^٦

٢. (٤س + ٣) / (٢√(٢س٢+ ٣س +١))

٣ س / (...) + √(س +١)

$$\sqrt{٢\text{س} + ١}$$

٤. $\dfrac{١}{٤\sqrt{١ + \sqrt{\text{س}}}\;\sqrt{\text{س}}}$

٥. $\dfrac{٩\,(١ + \sqrt{\text{س}})^{٨}}{٢\sqrt{\text{س}}}$

(٢ – ٦) : قاعدة التسلسل

كما علمنا سابقاً عند الحديث عن دالة الدالة أنة إذا كان ص = د(ع) ، ع = د(س) فإنه يمكن إيجاد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ كالآتي : بتفاضل ص بالنسبة إلى ع وكذلك يمكن إيجاد $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ من الدالة ع = د (س) .

وجبرياً فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ (أي ضرب تفاضل الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية) .

قاعدة (١) :

إذا كـــان : ص = د (س) ، س = د (ن) فإنـــه يمكـــن إيجـــاد $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ كالآتي :

ومن الدالة الأولى نوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ← (١) ومن الدالة الثانية نوجد $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ ← (٢)

ومن (١) ، (٢) نجد أن : $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ أي $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = تفاضل الدالة الأولى × تفاضل الدالة الثانية .

مثال (١٨) : إذا كان ص= ٤س^{٣} – ٢س + ٣ ، س = (ن- ٢) أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ عند س =١ ن = ٣ .

الحل :

من الدالة الأولى $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١٢س^{٢} – ٢ ← (١) ومن الدالة الثانية نوجد

دن/دس = ٢(ن- ٢) × ١ = ٢ن – ٤ ← (٢) (تفاضل دالة دالة)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = (١٢س^{٢} - ٢) (٢ن – ٤)

∴ ($\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$) = (١٢×١ – ٢) (٢×٣ – ٤) = ١٠ × ٢ = ٢٠

مثال (١٩) : إذا كان ص = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س}}$ ، **س**= (ن + ٢) (ن–١) . وذلك عند ن=٢

الحـــل :

مـن الدالـة الأولى دس/دص = ٢/١ (س٢ – ٢س)- ١/٢ (٢س - ٣) ← (١) (تفاضـل دالة دالة)

مــن الدالــة الثانيــة دن/دس = (ن + ٢)×١+(ن- ١)×١= ٢ن + ١ ← (٢) تفاضــل ضرب التع)

∴ من (١) ، (٢) : دس/دص = دس/دص × دن/دس = (٢س – ٣) / (٢ √(س٢ – ٣س)) × (٢ن+١)

عند ن = ٢ ومن الدالة الثانية فإن س = (٢ +٢) (٢ – ١) = ٤

∴ (دن/دص) = (٢× ٤ – ٣) / (٢ √(٤٢ – ٣×٤)) ×(٢×٢ + ١)= ٥ / (٢√(١٦ – ١٢)) × ٥ = ٥ / (٢×٢) × ٥ = ٢٥ / ٤

قاعدة (٢) :

إذا كان ص = د (ن) فإن دس/دص يمكن إيجادها كالآتي :

من الدالة الأولى نوجد دن/دص ← (٢) ومن (١) ، (٢) نجد أن :

دس/دص = دن/دص × دس/دن أي دس/دص = تفاضــل الدالـــة الأولى × مقلـــوب تفاضل الدالة الثانية .

مثــال (٢٠) : إذا كــان ص = ن٣ – ٢ن٢ + ن ، س = ن٢ – ٢ن أوجـد دس/دص عند =٢

٢

من (١) ، (٢) دس/دص = دن/دص × دس/دن = ٣ ~ ٢ – ٤ن +١ × ن- ١/١ (نحلل تفاضل الدالة الأولى) .

(دس/دص) = ((٣ن – ١) (ن- ١) × ١) / (ن- ١) = ٣×٢- ١ = ٥ .
ن= ٢

مثال (٢١) :

إذا كان س = $\frac{١ - ن^٢}{١ + ن^٢}$ ص = $\frac{٢}{١ + ن^٢}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$

الحــل :

من الدالة الأولى نوجد $\frac{ءس}{ءن}$ = $\frac{(١ + ن^٢)(-٢ن) - (١ - ن)^٢ \times ٢ن}{(١ + ن^٢)^٢}$ =

$\frac{-٢ن - \cancel{٢}ن^٣ - ٢ن + \cancel{٢}ن^٣}{(١ + ن^٢)}$ (تفاضل قسمة والقيم)

∴ دس/دن = $\frac{-٤ن}{(١ + ن^٢)^٢}$ ← (١)

من الدالة الثانية نوجد دص/دن = $\frac{(١ + ن^٢) \times صفر - ٢ \times ٢ن}{(١ + ن^٢)^٢}$ = $\frac{-٤ن}{(١ + ن^٢)^٢}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن دص/دس = دص/دن × دن/دس = $\frac{\cancel{-٤ن}}{\cancel{(١ + ن^٢)}} \times \frac{\cancel{(١ + ن^٢)}^٢}{\cancel{-٤ن}}$ = $\underline{\underline{١}}$

تمرين (٢- ٦) :

١. إذا ص = ن^٢ + ن ، س = ٣ن - ١ أوجد دص/دس عند ن= ١٠

٢. إذا كان ع = ٥ + س٢ ، ص = $\frac{١}{\sqrt{٥ + س^٢}}$ أوجد دص/دع عند س = ٢

٣. إذا ص = $\sqrt{ن^٢ + ٩}$ ، س = (ن + ٢)(ن - ١) أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند ن= ٢

٤. إذا ص = $\sqrt{ن^٢ + ٣ن}$ ، س = ٢ن^٢ – ن أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند ن= ١

٥. إذا ص = $\frac{٢ن^٢}{١ + ن^٢}$ ، س = $\frac{٢}{١ + ن^٢}$ أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند ن= ١

حل تمرين (٢- ٦) :

١. ٧

٢. $-\frac{١}{١٠٨}$

٣. ٥

٤. $\frac{٥}{١٢}$

٥. −٧

(٢- ٧) الدالة الضمنية :

الدوال على الصورة ، $ص = س^{٢} + ٢س - ١$ ، $ص = (س+٢)^{٢}$ ، $ص = ٣ع^{٢} - ٥ع$ تسمى داول صريحة ، أما الدوال على الصورة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٦$ ، $س ص = (س+ص)^{١/٢}$ تسمى دوال ضمنية .

تفاضل الدالة $ص^{ن}$ بالنسبة إلى س :

بفرض أن $ع = ص^{ن} \Leftarrow \frac{دع}{دص} = ن ص^{ن}$

ومن قاعدة التسلسل : $\frac{دع}{دس} = \frac{دع}{دص} \times \frac{دص}{دس} = ن ص^{ن-١} \times \frac{دع}{دص}$ ويبقى الرمز $\frac{دص}{دس}$ والأعلى العلاقة بين ص و س .

$$\boxed{\therefore \frac{د}{دس}(ص^{ن}) = ن ص^{ن-١} \times \frac{دص}{دس}}$$

فمثلاً : $\frac{د}{دس}(ص٢) = ٢ص \frac{دص}{دس}$ ، $\frac{د}{دع}(ن^{٣}) = ٣ن^{٢} \frac{دن}{دع}$. $\frac{د}{دن}(ف) = \frac{١}{٢} ف^{-١/٢} \frac{دف}{دن}$ وهكذا .

مثال (٢٢) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ١٢$ أوجد $\frac{دص}{دس}$

الحل :

واضح ان هذه الدالة ليست صريحة ∴ هي دالة ضمنية ولإيجاد $\frac{دص}{دس}$ من الدالة الضمنية نفاضل الطرفين بالنسبة إلى س :

∴ بتفاضل طرفي الدالة بالنسبة إلى س .

∴ $د/دس (س^{٢}) + \frac{د}{دس}(ص^{٢}) = \frac{د}{دس}(١٢)$

$٢س + ٢ص \frac{دس}{دص} = صفر \Leftarrow ٢ص \frac{دص}{دس} = -٢س$ نجعل $\frac{دص}{دس}$ موضع القانون بقسمة الطرفين على ٢ ص

∴ $دس/دص = \frac{-٢س}{٢ص} = \frac{-س}{ص}$.

مثال (٢٣) : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كان س^{٣} ص^{٢} + ٢ص = ٨ وذلك عند س = ١

الحل :

بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س :

$\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (س^{٣} ص^{٢}) + ٢ $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ص) = $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (٨) ، الحد الأول في الدالة ضرب والقيمة ودالة ضمنية في نفس الوقت :

س^{٣} $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (ص^{٢}) + ص^{٢} $\frac{\text{د}}{\text{دس}}$ (س^{٣}) + $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = صفر

∴س^{٣} × ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ × ٣س^{٢} + ٢ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = صفر

نجعل الكميات المحتوية على $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بالطرف الأيمن والغير محتوية على $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بالطرف الأيسر .

∴ ٢س^{٣} × ٢$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - ٣س^{٢}ص^{٢} نجعل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ موضع القانون

دس/دص (٢س^{٣} + ٢) = - ٣س^{٢} ص^{٢} وبقسمة الطرفين على (٢س^{٣} ص + ٢)

نحصل على:

$$\text{دس/دص} = \frac{-\ \text{س٢ ص}^{٢}}{\text{٢س}^{٣}\text{ص} + ٢}$$

عند س =١ بالتعويض في الدالة عند س =١ يمكن إيجاد قيمة ص كالآتي :

ص٢ + ٢ص – ٨ = صفر بالتحليل نحصل على (ص + ٤) (ص - ٢) = صفر ⟸

ص = - ٤ ، ٢

$$\therefore \left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right)_{(١،-٤)} = \frac{-٣ \times ١ \times (-٤)^{٢}}{٢ \times ١ \times -٤ + ٢} = \frac{-٤٨}{-٦} = ٨$$

$$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)_{(١،٢)} = \frac{-٣ \times ١ \times ٢^{٢}}{٢ \times ١ \times ٢ + ٢} = \frac{-١٢}{-٦} = -٢$$

مثال (٢٤) إذا كانت س ٢ – ٥س ص + ص^{٢} – ٧ = صفر أوجد قيمتي دص/دس عندما س = ١

الحل :

بتفاضل الطرفين . دس ..

د/دس (س^{٢}) – ٥ د/دس (س ص) + د/دس (ص^{٢}) – د/دس (٧) = صفر

٢س – ٥ (س × دص/دس +ص ×١) + ٢ص دص/دس = صفر

٢س – ٥س دص/دس – ٥ص + ٢ص دص/دس = صفر

دص/دس (- ٥س + ٢ص) = ٥ص – ٢س

∴ د = (٥ص - ٢س) / (٢ص – ٥س)

عند س = ١ نعوض س = ١ في الدالة نحصل على قيمتي ص .

∴ ١- ٥ص + ص^{٢}– ٧ = صفر ⇐ ص٢ – ٥ص – ٦ = صفر وبالتحليل

(ص – ٦) (ص + ١) = صفر ومنها ص = ٦ ، ١

(د) (١ ، ٦) = (- ٥ – ٢) / (١٢ – ٥) = ٢٨ / ٧ = ٤

(د) (١ ، - ١) = (- ٥ – ٢) / (- ٢ – ٥) = - ٧ / - ٧ = ١

∴ قيمتي د عند س = ١ هما ٤ ، ١

تمرين (٢ – ٧)

١. أوجد د إذا كان س٢ + ص٢ = ١٦ .

٢. معطى س٢ + ٢ص٢ = ٩ أوجد د عند س =١

٣. أوجد د إذا كان ص٢ – ٣ س ص + ٥ س – ٣ = صفر وذلك عند س=١

٤. أوجد د إذا كان : س٣ + ص٣ + س ص٢ = صفر

٥. إذا كان : س٣ + ٣س٢ص + ٤س ص٢ + ٥ص٣ =١٣ أوجد د عند

س =١ ، ص = ١ .

درسنا في هذه الوحدة التغير وعرفنا معنى التفاضل وعرفنا كيفية إيجاد تفاضل الدوال المختلفة (ضرب دالتين ، قسمة دالتين ، دالة الدالة ، الدالة الضمنية) .

ولكي نعرف المعنى الهندسي لمتوسط معدل التغير ومعدل التغير سندرس في الوحدة القادمة كيفية إيجاد ميل المنحنى إذا علم معادلته وذلك باستخدام التفاضل .

إجابات تمرين (٢- ٧)

١. –س / ص

٢. ± !؛٤

٣. – (٣س٢ + ص٢)

٣ص + ٢س ص

٤. - !؛٢