

٣-١ : الؤجرة الثالثة

المعنى الهندسي لمؤسط معدل التغيير

(٢- ١) المعنى الهندسي لمتوسط معدل التغير ومعدل التغير للدالة :

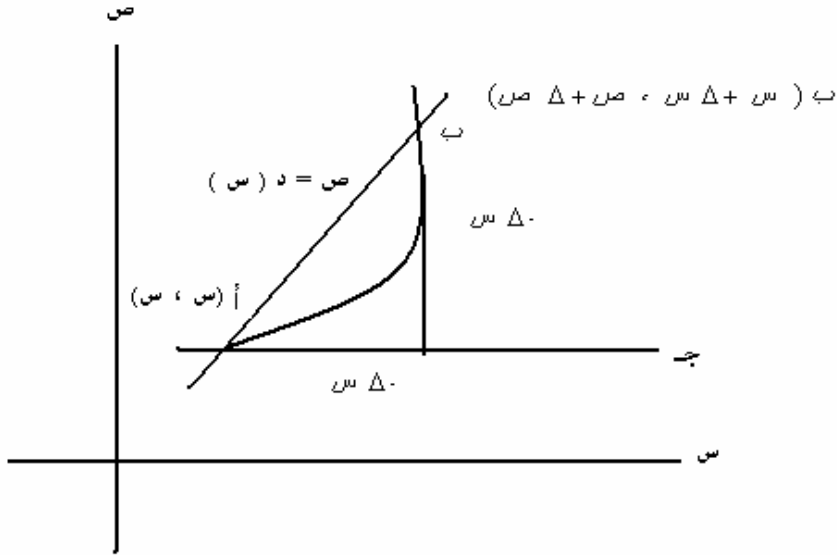
معلوم انه لايجاد ميل الخط المستقيم أ س + ب ص + د = صفر فانه $\frac{f'_-}{b}$ لكن

كيف يمكن ايجاد ميل المنحني عند نقطة ما (س ، ص) مثلا :

المنحني ٢ = د (س) يمكن ايجاد ميله عند النقطة ما برسم مماس للمنحني عند

نقطة ما برسم مماس للمنحني عند هذه النقطة ويكون ميل المنحني = ميل المماس عند

النقطة التماس كما يتضح من الآتي :



ميل الوتر أ ب القاطع للمنحني ص = د (س) $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ م . م . ب

∴ معدل التغير الدالة ص = د (س) هو ميل الوتر أ ب (وهو التفسير الهندسي لـ م . م . ب)
 فاذا اقتربت النقطة (ب) من النقطة (أ) فان $\Delta س$ تقترب من الصفر ويضرب ميل الوتر
 من ميل المماس أ ح .

∴ ميل المماس أ ح = $\lim_{\Delta س \rightarrow 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{د ص}{د س}$ وهو تفسير الهندسي لمعدل التغير للدالة

ص

∴ ميل المنحني ص = (د س) عند النقطة أ (س ، ص) = ميل المماس للمنحني عند النقطة أ

∴ ميل المنحني = $\frac{د ص}{د س}$ لمعادلة المنحني = ميل المماس للمنحني عند نقطة التماس

(٣ - ٢) : قواعد في ميل المنحني

قاعد (١) ميل المنحني $\frac{د ص}{د س}$ لمعادلة المنحني

مثال (١) :

اوجد ميل المنحني ص = 3س² - 2س + 1 عند س = ١ ، ص = ٠

الحل

∴ ميل المنحني = $\frac{د ص}{د س}$ لمعادلة المنحني فان ميل المنحني = $\frac{د ص}{د س} = 6س - 6$

$$\frac{د ص}{د س} = 6 \times 1 - 6 = 0$$

مثال (٢) :

اوجد ميل المماس للدائرة س² + ص² - 3س + 4ص = 5 عند النقطة (3 ، 1) .

الحل

∴ ميل المماس = ميل المنحني عند النقطة التماس = $\frac{د ص}{د س}$ لمعادلة المنحني

لكن نلاحظ أن معادلة الدائرة هي دالة ضمنية لذلك يكون تفاضلها تفاضل الدالة الضمنية (تذكر تفاضل الدالة الضمنية) بتفاضل الطرفين بالنسبة إلى س .

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د س} - \frac{د (3س)}{د س} + \frac{د (2ص)}{د س} + \frac{د (2س)}{د س}$$

$$0 = \frac{د ص}{د س} 4 - 3 + \frac{د ص}{د س} 2 + 2س$$

$$3 - 2s = \frac{d}{s} 4 - \frac{d}{s} 2$$

$$3 - 2s = (4 - 2) \frac{d}{s}$$

$$\therefore \frac{9}{2} = \frac{9 - (3+6)}{4-2} = \frac{(3+2s)}{4-2} \left| \frac{d}{s} \right. \quad (1 \cdot 3)$$

مثال (٤) :

أوجد معادلة المماس للمنحني : $4 = s^2 - 3s + 2 + 2s^2 - 2s$ عند النقطة (١ ، -١).

الحل

أولاً نوجد ميل المماس .

ميل المماس = ميل المنحني عند نقطة التماس = $\frac{d}{s}$ لمعادلة المنحني بتفاضل الطرفين

بالنسبة الي س (تذكر ان الدالة ضمنية)

$$\therefore \text{صفر} = 2 - s = 3 - s \left(s + \frac{d}{s} \right) + 4 - \frac{d}{s} 2$$

$$\therefore 2 - s = 3 - \frac{d}{s} 3 + 4 - \frac{d}{s} 2$$

$$4 - \frac{d}{s} 3 = \frac{d}{s} 3 - 3 + 2 + s$$

$$\frac{d}{s} (4 - 3s) = 3 - 2 + s$$

$$\therefore \frac{3}{7} = \frac{3-}{7-} = \frac{2+2-3-}{3-4-} = \frac{2+س 2 - ص 3}{س 3 - ص 4} = \left| \begin{array}{l} د ص \\ د س \\ (1-، 1) \end{array} \right.$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \frac{3}{7}$$

ويمكن ايجاد معادلة المماس بمعلومية الميل $\frac{3}{7}$ ونقطة $(1, -1)$ من المعادلة .

$$ص - ص_1 = م(س - س_1)$$

$$ص - (-1) = \frac{3}{7}(س - 1) \text{ وبضرب كل الاطراف } \times 7 \text{ تصبح المعادلة :}$$

$$ص + 1 = 3س - 3 \iff 3س - ص = 4 \text{ هي معادلة المنحني .}$$

قاعدة (٢) اذا كان المماس للمنحني موازي للمحور السيني او من المنحني المحور السني

فان

$$\frac{د ص}{د س} = \text{صفر}$$

مثال (٥) :

في المنحني : $ص = 2س^3 - 3س^2 + 3س + 3$ أوجد النقاط التي يكون المماس موازيا

للمحور السيني .

الحل

∴ المنحني المحور السيني ∴ $\frac{د ص}{د س} = \text{صفر}$ ، ∴ $\frac{د ص}{د س}$ وتساويها بالصفر

$$\frac{د ص}{د س} = 6س - 2س^2 - 12 = \text{صفر} \text{ بالقسمة علي } 6$$

∴ $6س - 2س^2 - 12 = \text{صفر} \Leftrightarrow (2 - س)(1 + س) = \text{صفر}$ ∴ $س = 2$ ، $س = -1$

عند $س = 2$ نعوض في معادلة المنحني لنحصل علي قيمة

$$ص = 2 \times 2 - 2 \times 3 - 2 \times 12 - 3 = -7 \text{ عند } س =$$

$$س = -1 \Leftrightarrow ص = 2 \times (-1) - 3 - 12 - 3 = -17 \Leftrightarrow ص = -17$$

∴ النقط هي $(2, 17)$ ، $(-1, -10)$

قاعدة (٣) :

إذا قطع المنحني المحور السيني فان $ص = \text{صفر}$ في معادلة المنحني فاذا قطع المحور

الصادي فان $س = \text{صفر}$ في معادلة المنحني .

مثال (٦) :

اوجد ميل المنحني $ص = س(س - 1)$ عند النقاط التي يقع فيها المنحني محور السينات.

الحل

المنحني الذي يقطع المحور السيني $ص = \text{صفر}$ في معادلة المنحني .

$$\text{صفر} = س(س + 1)(س - 1) \Leftrightarrow س = 0 \text{ ، } س = -1 \text{ ، } س = 1$$

∴ النقاط التي يقطع فيها المنحني المحور هي (0, 0)، (0, 1)، (0, -1) نوجد

$$\text{ميل المنحني} \Leftarrow \text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}$$

$$\text{∴ ميل المنحني} = \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 3\text{س}^2 - 1$$

ميل المنحني عند النقاط التي يقع فيها محور السينات .

$$1 - 1 = 0 \times 3 = \left. \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \right|_{(0,0)}$$

$$2 = 1 - 1 \times 3 = \left. \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \right|_{(0,1)}$$

$$2 = 1 - (-1)^2 \times 3 = \left. \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \right|_{(0,-1)}$$

∴ ميل المنحني عند النقاط التي يقطع فيها محور السينات هو : -1 ، 1 ، 2

مثال (٧) :

أوجد ميل المنحني : $\text{ص}^2 + \text{ص} - 2 = \text{س}^3$ عند النقاط التي يقع فيها محور

الصادات .

الحل

$$\text{ميل المنحني} : \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} \text{ ∴ دال المنحني دالة ضمنية}$$

∴ تفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير س.

$$\therefore \frac{d}{ds} (3) = (2v) \frac{d}{ds} - (s) \frac{d}{ds} - (s^2) \frac{d}{ds} + (s^2) \frac{d}{ds}$$

$$\therefore 2s + 2v \frac{dv}{ds} - 1 - \frac{dv}{ds} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} (2-1) = \frac{2-1}{2-v} = (2-2v) \frac{dv}{ds}$$

المحور الصادي فان س = صفر في معادلة المنحني بتعويض س = صفر في معادلة المنحني.

$$\therefore v^2 - 2v = -\text{صفر} \Leftrightarrow (v-1)(v+1) = \text{صفر}$$

∴ اما ص = 3 ، 1 ، -1 ∴ النقاط هي (0 ، 3) ، (ص ، -1) .

$$\therefore \frac{1}{4} = \frac{0-1}{(1-1)^2} = \left. \frac{dv}{ds} \right|_{(1, 0)} , \quad \frac{1}{4} = \frac{0-1}{(1-3)^2} = \left. \frac{dv}{ds} \right|_{(3, 0)}$$

قاعدة (٤)

إذا كان المنحني موازيا للمستقيم / س + ب ص + ج = صفر فان ميل المنحني = ميل

$$\frac{-}{ب} = \text{المستقيم} \left(\text{شرط تعامد مستقيمين} \right) \text{ أي ان } \frac{dv}{ds} = \text{ميل المستقيم}$$

(- معامل س) / (معامل ص) تذكر ميل المستقيم .

مثال (٨)

اوجد معادلة المماس للمنحني $ص = 5س^2 + 3$ عند النقطة التي يكون فيها

$$\text{المماس موازيا للمستقيم } 3ص = س + 3$$

الحل

∴ المماس للمنحني مواز للمستقيم ∴ ميل المنحني = ميل المستقيم .

$$(1) \leftarrow \text{ميل المماس} = \text{ميل المنحني} = \frac{دص}{دس} = 2س + 5$$

$$(2) \leftarrow \text{ميل المستقيم} = \text{ميل المماس} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{1-}{3} = \frac{1-}{3}$$

$$\text{لكن ميل المنحني} = \text{ميل المستقيم} \leftarrow (1) = (2)$$

$$\therefore \therefore 2س + 5 = \frac{1-}{3} \leftarrow 6س + 15 = 3- \leftarrow 6س = 3- - 15 = -18 \therefore س = -3$$

نعوض $س = -3$ في معادلة المنحني لنحصل علي $3- = 3 + 15 - 9$

∴ نقطة التماس $ص = (-3, -3)$.

معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1-}{3}$ ويمر بالنقطة $(-3, -3)$ هي :

$$ص + 3 = \frac{1-}{3}(س + 3) \leftarrow 3ص + 9 = 3- + س \leftarrow 3ص = 3- - 3 + س = ص - 12$$

القاعدة (5) اذا كان المماس للمنحني عمود علي المستقيم $س + بص + ج = صفر$

فان ميل المنحني = $\frac{1-}{\text{ميل المستقيم العمودي}}$ (شرط تعامد

مستقيمين)

مثال (٩):

اوجد المماس للمنحني $ص = 3 - 2س$ عند النقطة التي يكون عندها المماس

عموديا علي المستقيم $3ص + س - 1 = 0$ صفر

الحل

$$(1) \leftarrow \text{ميل المماس} = \text{ميل المنحني} \leftarrow \frac{دص}{دس} = 3 - 2س$$

$$(2) \leftarrow \text{المماس} = \frac{1-م}{\frac{1-م}{3}}$$

$$\therefore (1) = (2) \therefore 2س - 3 = 3 - 2س \Rightarrow 4س = 6 \therefore س = 1.5$$

نعوض في معادلة المنحني عن $س = 1.5$ $\therefore ص = 3 - 9 = -6$ صفر

\therefore المماس يمر بالنقطة $(1.5, -6)$ وتكون معادلة المماس هي :

$$ص - (-6) = (س - 1.5) \cdot (-6) \Rightarrow ص + 6 = -6س + 9 \therefore ص = -6س + 3$$

مثال (١٠):

اوجد معادلات المستقيمات التي توازي المستقيم $ص = 6س + 11$ وتمس المنحني

$$ص = 6س^3 + 11$$

الحل

$$(1) \leftarrow \text{ميل المماس} = \text{ميل المنحني} = 3 = 18س^2 \Rightarrow س = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\text{ميل المماس} = \text{ميل الموازي} = \frac{6-}{1-} = 6 \leftarrow (2)$$

لكن (1) = (2)

$$\therefore \therefore 3 \leq 6 - 2 \leq 3 \leq 12 \leq 3 \leq 4 = 2 \therefore 2 \pm = 3$$

عند $s = 2$ وبالتعويض في معادلة المنحني $\therefore 8 = 11 + 12 = 7$.

\therefore النقطة الاولى هي (2 ، 7) ومعادلة المماس الاول عند هذه النقطة والميل = 6 هي :

$$\text{ص} - 6(7 - 2) \therefore \text{ص} = 7 = 6 - 12 \leq 6 - \text{ص} - 5 = \text{صفر}$$

$$\text{عند } s = -2 \therefore \text{ص} = - = 11 + 12 + 8 = 15.$$

تمرين : الوحدة الثالثة :

$$1. \text{ اوجد ميل المنحني ص} = 2 + 2 \text{ عند } s = 1.$$

$$2. \text{ اوجد ميل المماس للمنحني ص} = 2 = 2\text{ص} + 8 \text{ عند النقطة } (1, 4).$$

$$3. \text{ اوجد ميل المماس للمنحني ص} = 6 - s - s^2 \text{ عند النقطة التي يقع فيها المنحني}$$

محور السينات

$$4. \text{ اوجد احداثيات النقطة التي تقع علي المنحني ص} = s - 4 + 3 \text{ والتي يكون}$$

المماس عندها موازيا لمحور السينات .

$$5. \text{ اوجد ميل المنحني ص} = 2 + \text{ص} - 2 \text{ عند النقطة التي يقطع فيها}$$

المنحني محور الصادات .

٦. اوجد معادلات المستقيمات المماسة للمنحني $s^3 - 3s^2 - 12s$ والتي يكون

$$\text{المماس عندها مواز لمستقيم } 3s - ص + 1 = \text{ صفر}.$$

٧. اوجد معادلة المماس للمنحني $3s - 4s^2 + 31$ عند النقطة $(2, 3)$.

٨. اوجد معادلات المستقيمات المماسة للمنحني $ص = s^2 + 2s$ والتي تكون عمودية

$$\text{علي المستقيم } 4ص + س = 5$$

٩. اوجد احداثيات النقطة علي المنحني $ص = 3s - s^2$ والتي يكون المماس عندها

$$\text{عموديا علي المستقيم } س - 3ص = 3.$$

١٠. اوجد النقطة علي المنحني $س^2 + 5س + 3$ والتي يكون المماس عندها مواز

$$\text{للمستقيم } ص = 1 - س.$$

إجابات تمرين الوحدة الثالثة :

١. 4

٢. $\frac{8-}{5}$

٣. $5 \pm$

٤. $(1, 2)$

٥. $\frac{1}{7} \pm$

٦. $3س - ص - 45 = \text{ صفر}$ ، $3س - ص + 9 = \text{ صفر}$

٧. $7س - 10ص + 44 = \text{ صفر}$.

$$8. \quad 4s - v - 2 = \text{صفر}، \quad 4s - v + 2 = \text{صفر}$$

$$9. \quad (0, 2)$$

$$10. \quad (-3, -3)$$