٤-١: الوحدة الرابعـــة

التكامـــل

تعريف : يعرف التكامل بأنه العملية العكسية للتفاضل .

ففـي التفاضـل نعطـي الدالـة ونطلـب إيجـاد معـدل تغيرهـا ، أمـا في التكامـل فنعطـي معـدل التغير للدالة ويطلب الدالة نفسها .

وبعبارة أخرى إذا علمنا مشتقة الدالة فانه يمكن إيجاد الدالة والأمثلة التالية تدل علي ذلك:

إذا كان :

$$ص = س^{2} \quad فان \quad \frac{د\,ص}{د\,س} = ٢س .$$

$$ص = س^{2} + \frac{1}{2} \quad فان \quad \frac{د\,ص}{د\,س} = ٢س .$$

$$ص = س^{2} + \frac{1}{2} \quad فان \quad \frac{د\,ص}{د\,س} = ٢\,س .$$

وذوا كـان $\frac{د\,ص}{د\,س} =$ ٢ س فـان ص = $س^{2}$ + ث . حيـث ث هـي ثابت التكامـل وهـذا الثابت يأخذ قيم مختلفة ويمكن إيجاد قيمته إذا علمنا نقطة تمر بها الدالة أو المنحني .

وهذان الثابت لابد من إضافته عند تحويل المشتقة إلى الدالـة (في التكامل غير المحدود) لأننا نلاحظ من المثال السابق أن التفاضل جميع الدوال التي في المثال = ٢ س مع اختلاف كل دالة عن الأخرى في قيمة الثابت ، ذلك لان تفاضل الثابت = صفر كما مر بنا في التفاضل .

و: الرياضيات تستخدم الرموز بدلا عن العبارات فان التكامل رمز هو($\int$) ويعني إجراء عملية التكامل لما بعده .

مثال : $\int$ ٢ س . د س = $س^{2}$ + ث

ولا بد من نعين المتغير الذي تتم عملية التكامل بالنسبة له .

(٤- ١) التكامل غير المحدود .

وهو تكامل لا يمكن إيجاد قيمته كقيمة معينة ولذلك يضاف إلي هذا النوع من التكامل في نهاية عملية التكامل ثابت يسمي ثابت التكامل كما سيأتي ذلك في الأمثلة التالية:

قوانين في التكامل :

١. $\int س^{ن} \, . د س = س^{ن+1} + ث$.

٢. $\int \sqrt{س} \, د س = \int س^{\frac{1}{2}} \, د. س = \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ث$.

٣. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{س^{2}}} \, . د س = \int س^{-\frac{2}{3}} \, . د س = - ٣ س^{-\frac{1}{3}} + ث$.

٤. $\int \frac{1}{س^{2}} \, . د س = \int س^{-4} \, . د س = \frac{- س^{-3}}{3} + ث$.

٥. $\int أ \, س^{ن} \, . د س = \frac{أ س^{ن+1}}{ن+1} + ث$

مثال :

$$\int 5 س^{4} \, د س = \frac{5 س^{5}}{5} + ث = س^{5}$$.

$$\int أ د س = أ س + ث$$.

مثال :

$$\int 3 د س = 3 س + ث \quad ، \quad \int \frac{1}{2} . د ع = \frac{1}{2} ع + ث$$.

$$\int د س = س + ن$$.

تكامل المجموع الجبري لعدة دوال متغير مستقل واحد يساوي المجموع الجبري لتكاملات هذه الدوال لنفس المتغير .

الأمثلة :

مثال ١ :

$$\int (3 س^{2} - 2 س + 1) . دس$$

من القاعدة

٥. : $\int (3س^2 - 2س + 1) . د س = \int 3س^2 - 2 \int س . د س + \int ١ ز د س$.

لاحظ انه يضاف ثابت واحد في نهاية التكامل .

٦. لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل ضرب دالتين او داله أو قسمة دالتين كما هو الحال في التفاضل . فقط نحول التكامل إلى الصورة القياسية صورة البسط كما يتضح ذلك من الأمثلة التالية :

مثال : (٢) :

أوجد $\int$ (س + ٢) (س - ٣) . د س .

يلاحظ ان هذا التكامل هو تكامل ضرب دالتين لذلك نجعله في الصورة القياسية بفك الاقواس كما يلي :

$\int$ (س + ٢) (س – ٣) . د س = $\int (س^2 - س - 6) . د س = \frac{س^3}{3} - \frac{س^2}{2} - 6س + ث$.

مثال (٣) :

أوجد $\int (س - 5)^2 . د س$.

بفك الأقواس $\int (س - 5)^2 . د س = \int (س^2 - 10 + 25) . د س$

=

$\frac{س^3}{3} - 5س^2 + 25 س + ث$.

مثال (٤)

أوجد $\int \frac{س^2 - 4}{س + 2} . د س$

الحل

يلاحظ أن هذا التكامل هو تكامل قسمة دالتين لذلك نجعله في الصورة القياسية صورة البسط وذلك بالتخلص من المقام بتحليل البسط والاختصار كما يلي .

$\int \frac{\text{س}^2-4}{\text{س}+2}.\text{د س}$ البسط فرق بين مربعين (بالتحليل والاختصار)

$$\int \frac{\text{س}^2-4}{\text{س}+2}.\text{د س} = \int \frac{(\text{س}+2)(\text{س}-2)}{(\text{س}+2)}.\text{د س} = \int (\text{س}-2).\text{دس}$$

$$\frac{\text{س}^2}{2}-2\text{س}+\text{ث}$$

مثال (٥) :

$$\int \text{س}(\text{س}+1)(\text{س}-2).\text{د س}$$

الحل

بفك الأقواس .

$$\int \text{س}(\text{س}+1)(\text{س}-2).\text{دس} = \int \text{س}(\text{س}^2-\text{س}-2).\text{د س}$$

$$= \int (\text{س}^3-\text{س}^2-2\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{4}-\frac{\text{س}^3}{3}-\text{س}^2+\text{ث}$$

مثال (٦)

$$\int \frac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1}\text{د.س}$$

الحل

بتحليل البسط (فرق بين مكعبين) والاختصار

$$\therefore \int \frac{\text{س}^3-1}{\text{س}-1}\text{د.س} = \int \frac{(\text{س}-1)(\text{س}^2+\text{س}+1)}{(\text{س}-1)}\text{د.س}$$

$$= \int \frac{\text{س}^3}{3}+\frac{\text{س}^2}{2}+\text{س}+\text{ث}$$

مثال (٧)

$$\int \frac{س^6+2س^5-3س^2+س-2}{س^2}.د\,س$$

الحل

بالتحليل والاختصار = $\int \frac{(س-4)(س+1)}{س+1}.د\,س$ = $\int (س-4).\ د\ \ س = س^2-4\ س+ث$

مثال (٩)

$$\int \frac{س+1}{\sqrt{س}+1}.د\,س$$

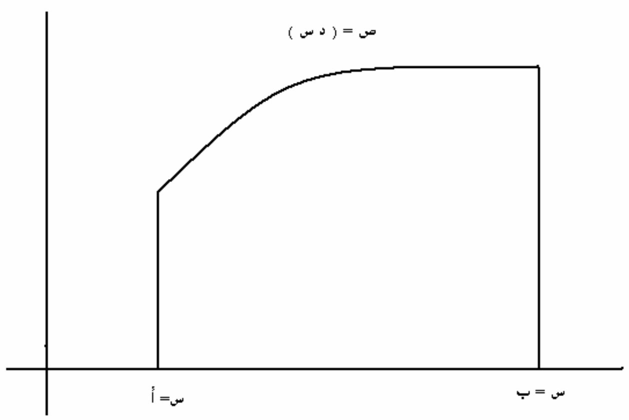
بالتحليل والاختصار = $\int \frac{(\sqrt{س})^2-1}{\sqrt{ش}+1}.د\,س$ = $\int \frac{(\sqrt{س}-1)}{(\sqrt{س}+1)}$ = $\int (\sqrt{س}-1).د\,س$

$(س^{\frac{1}{2}}-1).\ د\ س\ \ = \frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}}-س+ث$

(٤- ٣) التكامل المحدود :-

وهو التكامل المحدود بنهاية دنيا ونهاية عليا للداله القابلة للاشتقاق ويعبر عن المساحة تحت . منحني الدالة بين س = أ ، س = ب ، حيث(أ) هي النهاية الدنيا (ب) النهاية العليا. وبذلك فهو يعطي التكامل كقيمة معينة . والشكل التالي يوضح ذلك :

$$\int_{أ}^{ب} ص\ :\ دس$$



قانون الشكل المحدود :

$$\int_{أ}^{ب} س^{ن} \,.\, د\,س = \left[\frac{س^{ن+1}}{ن+1}\right]_{أ}^{ب} =$$

(تعويض س = ب) – (تعويض س = أ)

لاحظ انه لا يضاف ثابت للتكامل لان هذا التكامل محدد . كما يلاحظ ان التعويض يتم بعد إجراء عملية التكامل وليس قبلها .

الأمثلة :

مثال (١) أوجد ق $\int_{1} (3س^{2} - 2س + 1) \,.\, د\,س$.

الحل

$$= \left[س^{3} - س^{2} + س\right]_{1}^{2} = (2^{3} - 2^{2} + 2) - (1 - 1 + 1)$$

$$= (8 - 4 + 2) - (1) = 5 \;.$$

مثال (٢) :

$$\int_{0} \left(\frac{8\,س^{5} - 3\,س}{س^{3}}\right) .\, د\,س$$

الحل

$$= \int_{0} س^{-3}\,(8\,س^{5} - 3\,س) \,.\, د\,س \;=\; \int_{0} (8\,س^{2} - 3\,س^{-2}) \,.\, د\,س$$

$$= \left[\frac{8}{3}س^{3} + 3س^{-1}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{8}{3} + 3\right) - (0) = \frac{17}{3}$$

$$\int_{1}^{9}$$

مثال : (٣) $\int \dfrac{\left(\sqrt{س}-1\right)^{2}}{\sqrt{س}}.د\,س$

الحل

بفك القوس في البسط = $\int_{1}^{9}\left(\dfrac{س-2\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}}\right).د\,س$

$= \int_{1}^{9} س^{-\frac{1}{2}}\left(س-2س^{\frac{1}{2}}+1\right).د\,س \qquad \int_{1}^{9}\left(س^{\frac{1}{2}}-2+س^{\frac{1}{2}}\right).د\,س$

$= \left[\frac{2}{3}س^{\frac{3}{2}}-2س+2س^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{9} = \left(\frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}-2\times 9+2\times(9)^{\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{2}{3}-2+2\right)$

$= \left(\frac{2}{3}\times 27-18+6\right)-\left(\frac{2}{3}\right) = \left(18-18+6\right)-\frac{2}{3} = 6-\frac{2}{3} = \frac{16}{3}$

مثال : (٤)

إذا كانت $ص^{2}+س-3=$ صفر أوجد $\int_{-1}^{3} س.س$

الحل

لا يمكن إيجاد $\int$ س . دس لذلك نعوض عن س بما يساويها من ص من المعادلة

$س = 2\,ص-3-ص^{2} \Leftarrow س = 2\,ص-3-ص^{2}$

$\therefore \int_{-1}^{3} س\,.دص = \int \left(2\,ص-3-ص^{2}\right).د\,ص = \left[ص^{2}-3ص-\frac{ص^{2}}{3}\right]_{-1}^{3}$

$= (9-9-9)-(1+3+\frac{1}{3}) = 9-4\frac{1}{3} = 4\frac{2}{3}$.

مثال (٦) "

$$\int_{-1}^{4} \frac{1-\text{س}^{\frac{3}{2}}}{1-\text{س}^{\frac{1}{2}}}\ .\ \text{د س}$$

الحل

بالتحليل للبسط كفرق بين مكعبين ثم الاختصار

$$= \int_{1}^{4} \frac{1-\left(\text{س}^{\frac{1}{2}}\right)^{3}}{1-\text{س}^{\frac{1}{2}}}\ .\text{د}\ ،\ = \int_{1}^{4} \frac{\left(1-\text{س}^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\text{س}^{\frac{1}{2}}+\text{س}\right)}{\left(1-\text{س}^{\frac{1}{2}}\right)}\ .\text{د}\ ،\ = \int_{1}^{4} \left(1+\text{س}^{\frac{1}{2}}+\text{س}\right).\text{د س}$$

$$= \left[\text{س} + \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{2}}{2}\right]_{1}^{4} =$$

$$\left(4+\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}+\frac{(4)^{2}}{2}\right)-\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)=\left(4+\frac{16}{3}+8\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)$$

$$= 12-\frac{3}{2}+\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{21}{2}+\frac{14}{3}=\frac{63+28}{6}=\frac{91}{6}$$

تمرين (٤- ١)

اجر التكاملات الاتية :

١. $(5\text{س}^4 - 3\text{س}^2 + 2\text{س} - 1).\text{د س}$

٢. $\int \sqrt{\text{س}}\,(1 - \text{س}).\ \text{د س}$

٣. $\int (1 - \sqrt{\text{س}})(2\text{س} + 1).\text{د س}$

٤. $\int \frac{\text{س} - 4}{\sqrt{\text{س}} - 2}.\ \text{د س}\ .$

٥. $\frac{2\text{س}^2 - 5\text{س} - 12}{\text{س} - 4}.\text{د س}$

٦. $\sqrt{\text{س}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)^2.\ \text{د س}$

٧. $\sqrt{\text{س}}\left(\sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt{\text{س}}}\right)^3.\ \text{د س}$

٨. $\int_{-1}^{3} (3\text{س}^2 - 2\text{س} + 5)\text{د س}$

٩. $\int_{0}^{3} \frac{(\text{س}^4 + 3\text{س}^2 - 2\text{س} + 5).}{\text{س}^2 + 2}\ \text{د س}$

. $\int_{-1}^{2} \text{س}(\text{س} - 3)(\text{س} - 2).\text{د س}$

١. $\int_{1}^{4} \frac{\text{س} - 1}{\sqrt{\text{س}} - 1}$

١٢. **اذا كان** $\text{ص}^3 = 8\ \text{س}$

أوجد $\int_{1}^{27}$: **ص. دس**

١. $\int_{0}^{2} \frac{27\text{س}^3 - 8}{3\text{س} - 2}.\text{د س}\ .$

. $\int_{1}^{2} \frac{\text{س}^3 - \frac{1}{\text{س}^3}}{\text{س} + \frac{1}{\text{س}}}.\text{د س}$

١. $\int_{-2}^{2} \frac{\text{ص}^2 + \text{ص}^4}{\text{س}^4}.\text{د ص}$

(٤- ٣) تطبيقات علي المنحني في التكامل :

علمنا من الوحدة الثالثة انه يمكن إيجاد ميل المنحني إذا علمنا معادله المنحني وبما أن التكامل هو العلمية العكسية للتفاضل كما سبق في التعريف فانه يمكن إيجاد معادله المنحني إذا علم ميل المنحني وذلك باستخدام التكامل غير المحدد ويظهر في هذه الحالة ثابت التكامل الذي يمنكن إيجاده إذا علم نقطة يمر بها المنحني كما يظهر من الأمثلة التالية :

مثال (١)

إذا كان ميل منحني عند نقطة علية (س ، ص) وهو ($3س^2 - 2$ س) اوجد معادله المنحني إذا علم انه يمر بالنقطة (١ ، ٢) :

الحل

$\therefore$ ميل المنحني = $3س^2 - 2$ س . وميل المنحني هو $\frac{د ص}{د س}$

$\therefore$ $\frac{د ص}{د س} = 3س^2 - 2$ س وباجراء التكامل لطرفي المعادلة .

$\therefore \int \frac{د ص}{د س} . د س = \int (3 س^2 - س) د س$.

$\therefore$ ص = $س^3 - س^2 +$ث وبما ان المنحني يمر بالنقطة (١، ٢) وبتعويض ص = ٢ ، س = ١

$\therefore 2 = 1 - 1 +$ ث $\Leftarrow$ ث $= 2$

$\therefore$ معادله المنحني هي ص $= س^3 - س^2 + 2$.

مثال (٢) :

اوجد معادلة المنحني الذي يحقق الشرطين :

أ . $\frac{د ص}{د س} = \left(س + \frac{1}{س}\right)^2$ ب . يمر بالنقطة (١ ، ٠)

ثم اوجد قيمة ص عندما س = - ٣ .

الحل

$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} = \left(س + \frac{1}{س}\right)^2$ بفك القوس في الطرف الايسر

$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س}$ $س^2 + 2 + س^{-2}$ وبتكامل الطرفين بالنسبة الي س .

$\therefore \int \frac{د\,ص}{د\,س}.د\,س = \int \left(س^2 + 2 + س^{-2}\right).د\,س$.

$\therefore ص = \frac{س^3}{3} + 2س - س^{-1} + ث$ والمنحني يمر بالنقطة (١ ، ٠) .

$\therefore$ صفر $= \frac{1}{3} + 2 - 1 + ث \Leftarrow ث = \frac{-1}{3} - 1 = \frac{-4}{3}$.

$\therefore$ معادله المنحني هي : $\frac{س^3}{3} + 2س - \frac{1}{س} - \frac{4}{3}$.

مثال (٣) :

إذا كان $س^3 \frac{د\,ص}{د\,س} + س = 4$ أوجد معالة المنحني اذا مر بالنقطة (٢ ، ١) .

الحل

نجعل $\frac{د\,ص}{د\,س}$ موضع القانون .

$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} = 4 - س$. $\Leftarrow \frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{4 - س}{س^3}$.

$\therefore \frac{د\,ص}{د\,ص} = س^{-3}\ (4 - س) \Leftarrow \frac{د\,ص}{د\,س} = س^{-3} - س^{-2}$.

بتكامل الطرفين بالنسبة إلى س

$\int \frac{د\,ص}{د\,س}.د\,س \quad \int (س^{-3} - س^{2}).د\,س$

$\therefore ص = -2س^{-2} + س^{-1} + ث$ عندما يمر المنحني بالنقطة (٢ ، ١)

$\therefore 1 = \frac{-2}{2^2} + \frac{1}{2} + ث \Leftarrow 1 = -\frac{2}{4} + \frac{1}{2} + ث \quad \therefore ث = 1$

$\therefore$ معادله المنحني هي : $ص = \frac{1}{س} - \frac{2}{س^2} + 1$

مثال : (٤) اذا كان $\left(\frac{د\,ص}{د\,س}\right)^2 - 4س\,\frac{د\,ص}{د\,س} + 4س^2 =$ صفر أوجد معادلة المنحني اذا كان مر بالنقطة (٢ ، ٣) .

الحل

نلاحظ أن الطرف الأيمن مفكوك مربع كامل ويمكن تحويله إلى مربع كامل .

$\left(\frac{د\,ص}{د\,س} - 2س\right)^2 =$ صفر وبأخذ الجزر التربيعي

$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} - 2س =$ صفر ومنها $\frac{د\,ص}{د\,س} = 2$ س وبتكامل الطرفين .

$\int \frac{د\,ص}{د\,س} . د\,س = \int (2\,س) . د\,س$

$\therefore$ ص $=$ س^2 +ث والمنحني يمر بالنقطة (٢ ، ٣)

$\therefore$ ٣ = ٤ + ث $\Leftarrow$ ث = - ١ .

$\therefore$ معادله المنحني المطلوب تصبح ص = س$^2 - 1$.

تمرين (٤–٢) :

١. اذا كان وميل المنحني ص = د (س) عند أي نقطة علية هو (٢ س – ٣) اوجد معادلته علما بانه يمر بالنقطة (٣ ، ٢) .

٢. إذا كان $\frac{د\,ص}{د\,س}$ لمنحني ما يساوي 7 س 5 – س^2 اوجد معادلة المنحني إذا علمت انه يمر بالنقطة يمر بالنقطة (١ ، ٢) .

٣. إذا كان ميل المماس لمنحني ما عند النقطة (س ، ص) يساوي 3س^2 – 4 س أوجد معادلة المنحني إذا مر بالنقطة (٢ ، ٣) .

٤. إذا كان ميل المماس لمنحني هو $\frac{4}{\sqrt{س}}$ – س وكان المماس يمر بالنقطة (4 ، 2) اوجد معادلة المنحني .

٥. اذا كان ميل المماس لمنحني هو $\frac{د ص}{د س} = س^4 + س^2 = 3$ ، ص $= 3$ ، عند س = ١

اوجد معادلة المنحني .

٦. أوجد معادلة المنحني الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٥) اذا كان

$$\left(\frac{د ص}{د س}\right)^2 - 2 س \frac{د ص}{د س} + س^2 = صفر \ .$$

٧. إذا كلن $س \frac{د ص}{د س} - 2س = ص \frac{د ص}{د س} - 2ص$.

أوجد معادلة المنحني عند النقطة (١، ١) .

إجابات تمارين الوحدة الرابعة :

١. $س^5 - س^3 + س^2 - س + ث$

٢. $\frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + ث$.

٣. $س^2 + س - \frac{4}{5} س^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + ث$

٤. $\frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} + 2س + ث$.

٥. $س^2 + 3س + ث$

٦. $\frac{2}{3} س^{\frac{3}{2}} - 2 س + 2 س^{\frac{1}{2}} + ث$

٧. $\frac{2}{5} س^{\frac{5}{2}} + 2 س^{\frac{3}{2}} + 4 س^{\frac{1}{2}} - 2س^{-\frac{1}{2}} + ث$

٨. ٤٠

٩. $1\frac{1}{3}$.

١٠. $17\frac{3}{4}$.

١١. $\frac{23}{3}$.

١٢. ١٢٠ .

١٣. 44 .

١٤. $\frac{5}{6}$.

١٥. 3

تمرين (٤–٢)

١. $ص = س^2 - 3س + 2$.

٢. $ص = \frac{7}{2} س^2 - 5 س - \frac{س^3}{3} + \frac{23}{6}$.

٣. $س^3 - 2س^2 + 3$.

٤. $ص = 8 س^{\frac{1}{2}} - \frac{س^2}{2} - 6$.

٥. $ص = \frac{1}{س} - \frac{1}{س^3} + 3$.

٦. $ص = \frac{س^2}{2} + \frac{1}{2}$.

٧. $ص = 2 س - 1$.