١٠-٢-١ : الوحدة الخامسة

الهندسة التحليلية

مقدمة :

الهندسة التحليلية هي فرع من فروع الرياضيات يبحث في تحديد مواضع النقط والمنحنيات الهندسية علي المستوي ، وتتحدد كل نقطة في المستوي بإحداثيين إحداثي سيني وإحداثي صادي وتسمي إحداثيات النقط بالإحداثيات الديكارتيزية نسبة إلي العالم الفرنسي ديكارت وتهدف هذه الوحدة إلي إلمام الطالب بمعادلات الخط المستقيم والدائرة .

يتكون منهج الهندسة التحليلية للشهادة الثانوية العالمية من :

أ / ما تم دراسته من قبل وهو الخط المستقيم ويتكون من :

١. إيجاد البعد بين النقطتين .
٢. إحداثي نقطة التنصيف بين نقطتين (س$_{١}$ ، ص$_{٢}$) (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) .
٣. إحداثي نقطة تقسيم بين نقطتين (س$_{١}$ ، ص$_{٢}$) (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) بنسبة م$_{١}$: م$_{٢}$.من الداخل والخارج .
٤. إيجاد مركز ثقل المثلث
٥. إيجاد إحداثي الرأس الرابع للأشكال الرباعية المنتظمة .
٦. شرط وقوع النقط علي استقامة واحدة .
٧. إيجاد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (س$_{١}$ ، ص$_{٢}$) (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) .
٨. شرط توازي وتعامد مستقيمين .
٩. معادلة المحورين .
١٠. معادلة المستقيمات الموازية للمحورين .
١١. معادلة المستقيم الذي ميله م ويقع جزء طوله ح من المحور الصادي .
١٢. معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة علية .
١٣. معادلة المستقيم المار بنقطتين .
١٤. إيجاد نقطة (نقطتي) تقاطع (تماس) أي شكلين هندسيين .
١٥. معادلة المستقيم الذي يقطع من المحورين جزئين طولاهما أ ، ب علي الترتيب .

١٦. رسم المستقيم معلوم المقطعين (المقطع السيني والمقطع الصادي) ، .
١٧. طول العمود النازل من نقطة (س، ص) علي المستقيم أس + ب ص + ج =صفر.
١٨. إيجاد الزاوية بين مستقيمين .
١٩. معادلتا منصفي الزاوية بين مستقيمين .

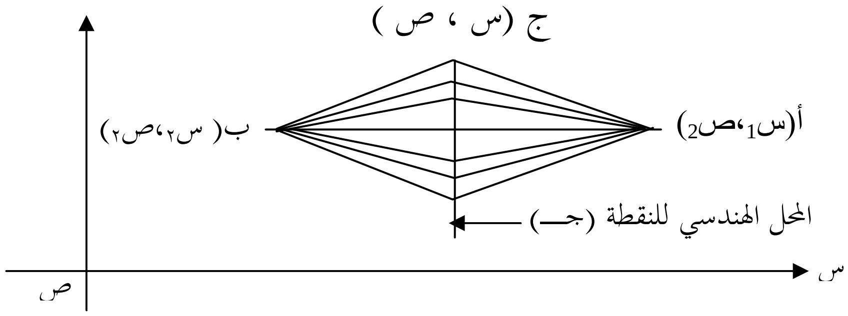
ب/ الدائرة :

تعريف الدائرة : الصورة القياسية والعامة لمعادلة الدائرة ، إيجاد مركز ونصف قطر الدائرة بمعلومية معادلتها ، إيجاد معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها ، إيجاد معادلة الدائرة التى تحقق ثلاثة شروط (تمر بثلاث نقاط ، تمر برؤوس مثلث ، يقع مركزها علي مستقيم معلوم المعادلة أو علي أحد المحورين) .

وسوف نتناول في هذا الجزء من الهندسة التحليلية الدائرة تعريفها ومعادلتها . ولكي نعرف الدائرة لابد من الإلمام بأساسيات المحل الهندسي .

تعريف المحل الهندسي :

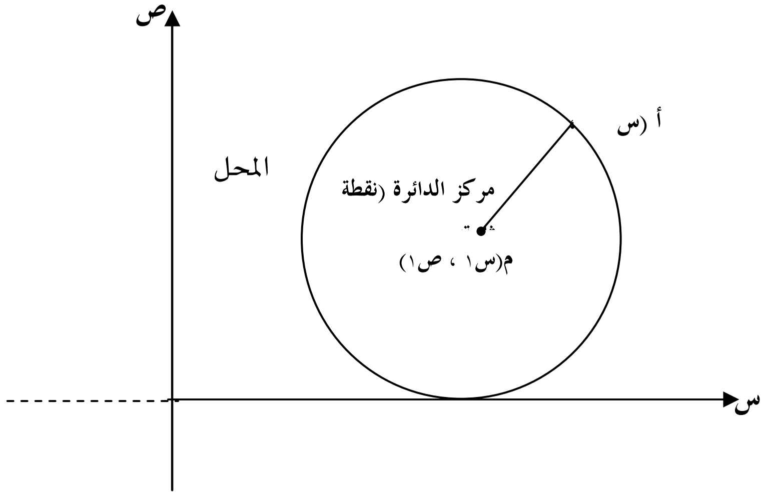
هو المسار الذي ترسمه نقطة تتحرك وفقاً لشروط معينة . فمثلاً ، إذا كان هناك نقطتان ثابتتان (٩ ، ب) ونقطة ثالثة متحركة (ج) علي مستوي الإحداثيين السيني والصادي ، والنقطة المتحركة تبعد بعداً متساو من النقطتين الثابتتين ، فإن المسار الذي ترسمه النقطة (ج) يسمي محلاً هندسياً .



فالمحل الهندسي الذي ترسمه النقطة المتحركة (ج) (وفقاً للشرط أعلاه ، علي بعد ثابت من ﻡ ،ب) عبارة عن خط مستقيم ويمكن إيجاد معادلة الخط المستقيم (المحل الهندسي) بمساواة البعد بين ﻡج ، ب ج (راجع قانون البعد بين النقطتين).

تعريف الدائرة والصورة القياسية لمعادلة الدائرة :

تعريف : الدائرة هى المحل الهندسى لنقطة تتحرك أ(س،ص) في مستوى معلوم بحيث تكون علي بعد ثابت (نصف القطر) ونقطة ثابتة (مركز الدائرة) .



ويمكن إيجاد معادلة الدائرة بإيجاد البعد بين النقطة الثابتة (م) (س_1، ص_1) والنقطة المتحركة (س ، ص) وهذا البعد يعطي نصف قطر الدائرة وبالتالي نحصل علي معادلة المحل الهندسي الذي هو معادلة الدائرة كالأتي :

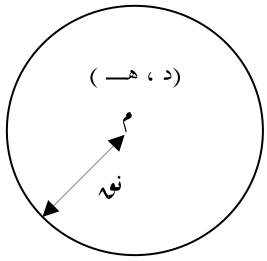
$\sqrt{(\text{س} - \text{س}_1)^2 \; (\text{ص} - \text{ص}_1)^2} = \text{نق}$ (تذكر قانون البعد بين النقطتين ($\text{س}_1 - \text{ص}_1$)، ($\text{س}_2 - \text{ص}_2$)) .

وبتربيع الطرفين نحصل علي $(\text{س} - \text{س}_1)^2 + (\text{ص} - \text{ص}_1)^2 = \text{نق}^2$.

معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (د ، هـ) ونصف قطرها نق:

إذا كانت لدينا دائرة مركزها (د ، هـ) بدلاً عن (س_1 ، ص_1) ونصف قطرها نق فإن معادلتها تكون : $\boxed{(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2}$

وتسمي هذه المعادلة (الصورة القياسية لمعادلة الدائرة) .



مثـــال (١):

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٣، - ٢)،ونصف قطرها = ٣ وحدات .

الحـل:

∴ $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$

المعطيات : د=٣ ، هـ = –٢ ، نق = ٣

∴ $(\text{س} - ٣)^2 + (\text{ص} - (-٢))^2 = (٣)^2 \Leftarrow \text{س}^2 - ٦\text{س} + ٩ + \text{ص}^2 + ٤\text{ص} + ٤ = ٩$

∴ معادلة الدائرة هي : $\text{س}^2 + \text{ص}^2 - ٣\text{س} + ٤\text{ص} + ٤ = \text{صفر}$

مثال (٢) :

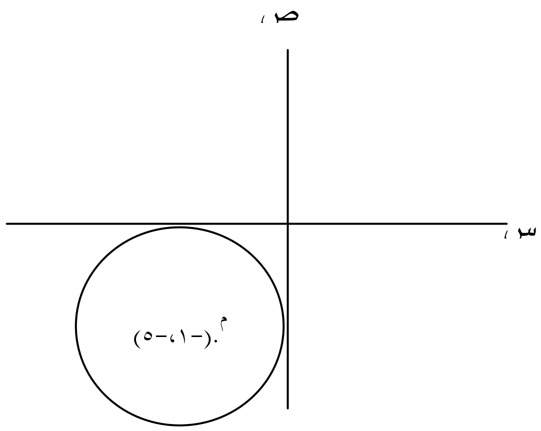
أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة أ (- ١ ، - ٥) وتمر بالنقطة (٣، –٤)

الحـل :

∴ $(\text{س} - \text{د})^2 + (\text{ص} - \text{هـ})^2 = \text{نق}^2$

المعطيات : د=- ١ ، هـ = –٥

المطلوب نصف القطر وهو يساوي البعد بين المركز والنقطة التي تمر بها الدائرة.



وباستخدام قانون البعد بين نقطتين أ ، م $\text{أم} = \sqrt{(\text{٣}+\text{١})^{\text{٢}} + (-\text{٤}+\text{٥})^{\text{٢}}}$

∴ نق $= \sqrt{\text{١}+\text{١٦}} = (\sqrt{\text{١٧}})^{\text{٢}}$

∴ $(\text{س}+\text{١})^{\text{٢}} + (\text{ص}+\text{٥})^{\text{٢}} = (\text{١٧})$ (نق$^{\text{٢}}$)

∴ $\text{س}^{\text{٢}}+\text{٢س}+\text{١}+\text{ص}^{\text{٢}}+\text{١٠ص}+\text{٢٥}-\text{١٧}=$ صفر

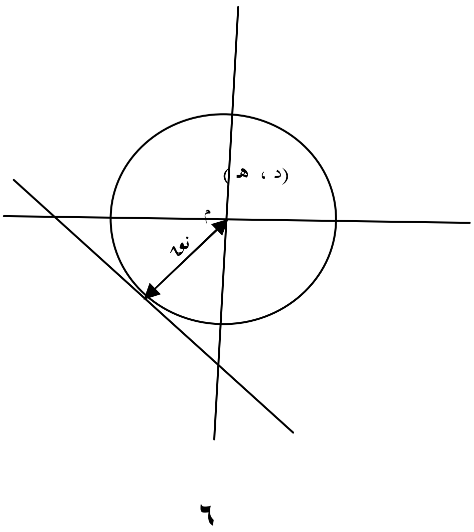
∴ $\text{س}^{\text{٢}}+\text{٢س}+\text{١}+\text{ص}^{\text{٢}}+\text{١٠ص}+\text{٢٥}-\text{١٧}=$ صفر

∴ $\text{س}^{\text{٢}}+\text{٢س}+\text{ص}^{\text{٢}}+\text{١٠ص}+\text{٩}=$ صفر

مثال (٣):

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (−١ ، ٢) وتمس المستقيم ٤س + ٣ص +٨ =صفر

الحل :



د = −١ ، هـ = ٢

نوجد طول العمود النازل من المركز إلى المستقيم المعلوم ($نق$) وهو يمثل نصف قطر الدائرة .

$$نق = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|-٤ \times ١ + ٣ \times ٢ + ٨|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{١٠}{٥} = ٢$$

∴ معادلة الدائرة تكون $(س + ١)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٤$ وبفك المربع الكامل وتجميع الحدود المتشابهة نحصل علي معادلة الدائرة :

$$س^٢ + ص^٢ + ٢س - ٤ص + ١ = صفر$$

نتيجة : معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل :-

∵ معادلة الدائرة التي مركزها (د ، هـ) هي $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نق^٢$

وبتعويض د = صفر ، هـ = صفر (لماذا) نجد أن معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل هي :

$$(س - صفر)^٢ + (ص + صفر)^٢ = نق^٢ \Leftarrow س^٢ + ص^٢ = نق^٢$$

مثال (٤) :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وقطرها $\sqrt{١٢}$

الحل :

∵ معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $نق$ هي $س^٢ + ص^٢ = نق^٢$

$\sqrt{نق} = ١٢$ ∴ $\sqrt{نق} = \frac{١٢}{٢} = \sqrt{٢} \sqrt{\frac{٣}{٢}} = \sqrt{٣}$ (راجع الأسس) .

∴ معادلة الدائرة هي : $س^٢ + ص^٢ = ٣$

مثال (٥) :

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (-٣ ، ٤) .

الحل :

نصف قطر الدائرة = البعد بين المركز والنقطة التي تمر بها الدائرة .

$$نق = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ + ص_١)^٢}$$

$نق = \sqrt{(صفر + ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢} = \sqrt{٩ + ١٦} = ٥$ ∴ المعادلة هي :

$$س^٢ + ص^٢ = ٢٥$$

تمرين (٥- ١):

١. أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٢، −٥) ونصف قطرها ٤ وحدات .

٢. أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (٣، −٢) وتمر بالنقطة (−١ ، ١) .

٣. أوجد معادلة الدائرة التي مركزها (−٤، ٦) وتمس المستقيم ٤س −٣ص +٤= صفر.

٤. أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل و قطرها $\sqrt{٨}$ وحدة .

٥. أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل و تمر بالنقطة (٦ ، − ٨) .

تمرين (٥- ٢):

الصورة العامة لمعادلة الدائرة وايجاد المركز ونصف القطر من الصورة العامة:−

قلنا أن الصورة القياسية لمعادلة الدائرة هي (س − د)^{2} + (ص −هـ)^{2} = نق^{2}

وهي معادلة دائرة مركزها النقطة (د ، هـ) ، ونصف قطرها نق^{2}

وبفك المربع الكامل في هذه المعادلة نحصل علي :

س^{2}+ ص^{2} −٢د س + د^{2}− ٢هـ ص + هـ^{2} − نق^{2} = صفر

وباستبدال الثابت د بالثابت (− ل) ، واستبدال الثابت هـ بالثابت (− ك)

واستبدال الثابت (د^{2}+ هـ^{2} − نق^{2}) بالثابت جـ وترتيب الحدود نحصل علي المعادلة التالية :

س^{2}+ ص^{2} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفر

وتسمي هذه المعادلة بالصورة العامة لمعادلة الدائرة وهي معادلة دائرة التي مركزها (−ل ، − ك) ونصف قطرها يمكن استنتاجه كالآتي :

بما أننا استبدلنا الثابت د^{2}+ هـ^{2}− نق^{2} بالثابت جـ

$\therefore$ د^{2}+ هـ^{2}− نق^{2} = جـ لكن د = −ل ، هـ = − ك (راجع الاستبدالات السابقة)

$\therefore$ ل^{2}+ ك^{2} − نق^{2} = جـ $\Leftarrow$ نق^{2}= ل^{2} + ك^{2} −جـ $\Leftarrow$ نق = $\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - \text{جـ}}$.

ومعادلة الدائرة في الصورة العامة لا بد أن تنطبق عليها الشروط التالية:

1. معادلة من الدرجة الثانية في مجهولين س ،ص .
2. معامل $س^٢$ = $ص^٢$
3. خالية من الحد س ص .

وإذا اختل أي شرط من هذه الشروط السابقة فإن المعادلة لا تسمي معادلة دائرة .

مثال (١) :

أي المعادلات التالية تمثل دائرة ولماذا ؟ .

أ. $س^٢$ ـ$ص^٢$ + ٢س + ٥ص = صفر

ب. $(س + ص)^٢$= ٢س ص + ٢س – ص + ٣

ج. $س^٢$ +ص ـ ٢س = ٢

د. $(س + ص)^٢$ = ٥

الحل :

أ. لا تمثل دائرة لأن معامل $س^٢$ ≠ معامل $ص^٢$ (تأكد من ذلك) .

ب.بفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة نحصل علي $س^٢$+ ٢س ص + $ص^٢$ = ٢ س ص + ٢س – ص +٣ وهي تمثل دائرة (تنطبق عليها شروط معادلة الدائرة)

ج. لا تمثل دائرة لأن ص ليست من الدرجة الثانية .

د. لا تمثل دائرة لأنها تحتوي علي الحد ٢س ص بعد فك المربع الكامل .

كيفية إيجاد مركز ونصف قطر الدائرة من معادلتها العامة :

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة كما ذكرنا سابقاً هي:

$س^٢$+ $ص^٢$ –٢ل س + $د^٢$ – ٢ ك ص + جـ =صفر

ومركزها (– ل ، – ك).∴ مركزها $(\frac{-\text{معامل س}}{٢}$ ، $\frac{-\text{معامل ص}}{٢})$ (تأكد من ذلك)

ونصف قطرها $= \sqrt{ل^2 + ك^2 - ج}$

ولإيجاد مركز الدائرة ونصف قطرها من معادلتها لا بد من التأكد أن :

1. المعادلة صفرية
2. معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = الوحدة

الأمثلة :

أوجد مركز ونصف قطر الدائرة التالية :

1. $س^2 + ص^2 - ٤س + ٢ص - ٤ = $ صفر

الحل :

المعادلة صفرية ، معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = الوحدة .

∴ مركزها = $\left(\frac{-\text{معامل س}}{2} ، \frac{-\text{معامل ص}}{2}\right)$

∴ م = $\left(-(-\frac{4}{2}) ، -\frac{2}{2}\right) = (2 ، -1) = (-ل ، -ك)$

∴ نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - ج}$

$-ل = 2$ ، $-ك = -1$ ، $ج = -4 \Leftarrow \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 - (-4)} = \sqrt{4 + 1 + 4} =$

$\sqrt{9} = 3$

2. أوجد مركز ونصف قطر الدائرة = $س^2 + ص^2 = ٦س + ٧$

الحل :

أولاً نجعل المعادلة صفرية ∴ $س^2 + ص^2 - ٦س - ٧ = $ صفر ومنها المركز =

$(-ل ، -ك) = \left(\frac{-\text{معامل س}}{2} ، \frac{-\text{معامل ص}}{2}\right) = \left(\frac{-(-6)}{2} ، \frac{-\text{صفر}}{2}\right) = (3 ، \text{صفر})$

∴ نق = $\sqrt{ل^2 + ك^2 - ج} = \sqrt{9 + 0 - (-7)} = 4$ وحدات .

3. أوجد مركز ونصف قطر الدائرة = $س^2 + ص^2 = ٤$ أ س (حيث أ ثابت) .

الحل :

أولاً نجعل المعادلة صفرية ∴ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ أ س = صفر ومنها المركز = (ل ، − ك) = $\left(-(-\frac{٤أ}{٢}) ، \frac{صفر}{٢}\right)$ = (٢أ ، ٠) .

نق = $\sqrt{(٢أ)^{٢} + (صفر)^{٢} - صفر}$ = $\sqrt{٤أ^{٢}}$ = ٢أ وحدة .

٤. أوجد مركز ونصف قطر الدائرة =٤س^{٢} + ٤ص^{٢} − ٨س + ٢٤ ص + ٣١ = صفر

الحل :

نجعل معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة وذلك بقسمة حدود المعادلة علي ٤ فتصبح المعادلة

س^{٢} + ص^{٢} −٢س + ٦ ص + $\frac{٣١}{٤}$ =صفر

∴م = $\left(\frac{-معامل\ س}{٢} ، \frac{-معامل\ ص}{٢}\right)$ = = $\left(\frac{-(-٢)}{٢} ، \frac{-(+٦)}{٢}\right)$ = (١ ، −٣) = (− ل ، − ك)

نق = $\sqrt{ل^{٢} + ك^{٢} - ج}$ = $\sqrt{١ + (-٣)^{٢} - \frac{٣١}{٤}}$ = $\sqrt{١٠ - \frac{٣١}{٤}}$ = $\sqrt{\frac{٤٠ - ٣١}{٤}}$

= $\sqrt{\frac{٩}{٤}}$ وحدة

تمرين (٥ – ٢) :

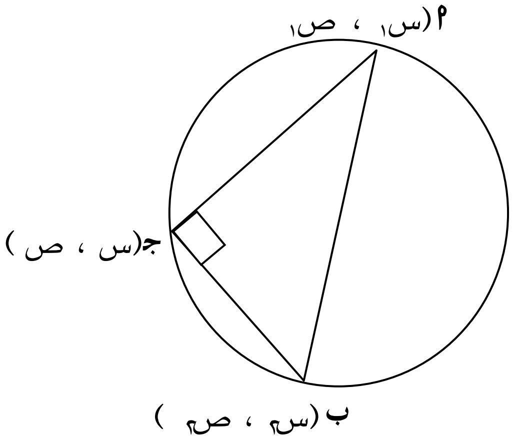
أوجد مركز ونصف قطر الدوائر التالية :

١. س^{٢} + ص^{٢} − ٦س + ٤ ص − ٣ =صفر
٢. س^{٢} + ص^{٢} = ص – س
٣. ٣س^{٢} + ٣ص^{٢} +٦س − ٣ ص−٢ = صفر
٤. أثبت أن المعادلة التالية تمثل دائرة وأوجد مركزها ونصف قطرها
(س + ص)^{٢} = ٢س (ص + ١) + ٣
٥. أوجد مركز ونصف قطر الدائرة (س – ٣) (س – ١) + (ص – ٢) (ص+ ٤) = صفر .

***

٥ – ٣ : معادلة الدائرة بمعلومية نهايتي قطر فيها :

علمنا من تعريف الدائرة أنها محل هندسي لنقطة تتحرك (س ، ص) وإذا علمنا إحداثي نهايتا القطر في الدائرة وهما أ(س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) فانه يمكن إيجاد معادلة هذه الدائرة كالآتي :



معلوم أن المثلث المرسوم في نصف قطر الدائرة قائم الزاوية (لماذا)

∴ الضلع أجـ ⊥ علي الضلع ب جـ ومن شرط تعامد مستقيمين م أ جـ × م ب جـ = −١

(راجع شرط التعامد)

∴ م$_{أجـ}$ = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ م$_{بجـ}$ = $\frac{ص - ص_2}{س - س_2}$ (راجع ميل المستقيم المار بنقطتين)

∴ م$_{أجـ}$ × م$_{بجـ}$ = −١ ∴ $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ × $\frac{ص - ص_2}{س - س_2}$ = −١ و بالضرب العكسي نحصل علي:

(ص − ص$_1$) (ص − ص$_2$) = − (س − س$_1$) (س − س$_2$) ونجعل المعادلة صفرية

نحصل علي معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها وهي

$$\boxed{(س-س_1) \times (س - س_2) + (ص - ص_1) (ص - ص_2) = صفر}$$

مثال (١) :

أوجد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتين (٣ ، −٢) ، (−١ ، ٤) .

الحل :

معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها وهي **(س−س$_١$) × (س − س$_٢$) + (ص − ص$_١$) (ص − ص$_٢$)** = صفر

ومن المعطيات : س$_١$ = ٣ ، ص$_١$ = - ٢ ، س$_٢$ = −١ ، ص$_٢$ = ٤

∴ معادلة الدائرة هي : (س_ ٣) (س +١) + (ص +٢) (ص − ٤) = صفر وبفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهة نحصل علي معادلة الدائرة كالآتي :

س^٢ + ص^٢ −٢س −٢ ص −١١ =صفر

مثال (٢) :

أوجد النقطتين أ ، ب لتقاطع الدائرتين : س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ ص +٩ =صفر س^٢ + ص^٢ −٨س −٢ ص + ٧ = صفر أوجد معادلة الدائرة المرسومة علي أ ب كقطر .

الحل :

علمنا من قبل أنه لإيجاد نقطتي تقاطع أي شكلين هندسيين نحل معادلتيهما آنياً. ولإيجاد نقطتي تقاطع دائرتين نتبع الخطوات التالية :

١. نطرح الدائرتين من بعضهما فنحصل علي معادلة خط مستقيم (معادلة من الدرجة الأولي في س ،ص) .

كالآتي :

س^٢ + ص^٢- ٦س + ٤ ص +٩ =صفر ← (١)

<u>س^٢ + ص^٢ - ٨س - ٢ ص + ٧ = صفر</u>← (٢)

(١) − (٢) : ٢ س − ٢ص + ٢ = صفر = س- ص + ١ = صفر ← (٣)

٢. نجعل أحد المجهولين في معادلة (٣) موضوع القانون كالآتي :

= س= ص –١ أو ص = س + ١

٣. نعوض قيمة س أو ص التي حصلنا عليها من (٢) في إحدى معادلتي الدائرتين فبتعويض س= ص – ١ في معادلة (١) نحصل علي معادلة في مجهول واحد .

(ص – ١) ^{٢} + ص^{٢} –٦(ص – ١) – ٤ ص +٩ =صفر بفك المربع الكامل وتجميع الحدود المتشابهة نحصل علي : ص^{٢} –٢ص + ١ + ص^{٢} –٦ ص +٦ – ٤ ص + ٩ = صفر ⇐ ٢ص^{٢} – ١٢ ص + ١٦ = صفر

ومنها نحصل علي : ص^{٢} – ٦ ص + ٨ = صفر .

٤. نحلل المعادلة التي حصلنا عليها من (٣) : (ص – ٢) (ص – ٢) = صفر فنحصل علي قيمتين للمتغير ص أو س

∴ ص = ٤ ، س = ٢نعوض قيمتها في معادلة (٣) فنحصل علي قيمتين للمجهول الآخر كالآتي :

من (٣) عند ص =٤ ⇐ س – ٤ + ١ = صفر ومنها س = ٣ ∴ النقطة أ هي (٣ ، ٤).

وعند ص = ٢⇐ س –٢+ ١ = صفر ومنها س = ١ ∴النقطة ب = (١ ، ٢) .

∴أ و ب نهايتا قطر في الدائرة نحصل علي معادلة الدائرة كالآتي :

(س – ٣) (س –١) + (ص –٤) (ص –٢) = صفر ⇐

س^{٢} + ص^{٢} –٤س – ٦ ص +١١ =صفر

تمرين (٥ – ٣) :

١. أوجد معادلة الدائرة التي قطرها الخط المستقيم الذي يصل بين النقطتين (٥ ، ٣) ، (٢ ، - ١).

٢. المستقيم ص + س = ١ يقطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ عند النقطتين أ ، ب أوجد معادلة الدائرة التي قطرها أب .

٥ – ٤ : معادلة الدائرة التي تحقق ثلاثة شروط :

علمنا في دراستنا السابقة أن معادلة الدائرة في الصورة العامة هي :

س^{٢}+ ص^{٢} –٢ل س + د^{٢} + – ٢ ك ص + جـ = صفر

وهي معادلة تشتمل علي ثلاثة ثوابت هي : ل ، ك ، جـ وكذلك الصورة القياسية لمعادلة الدائرة تشتمل علي ثلاثة ثوابت لذلك يمكن إيجاد معادلة الدائرة إذا حددنا قيم الثوابت الثلاثة ويتم ذلك بتكوين ثلاثة معادلات جبرية أي وجود ثلاثة شروط هندسية يمكن منها تكوين ثلاث معادلات تشتمل علي الثوابت الثلاثة وبحلها آنياً يمكن الحصول علي قيم ل ، ك ، جـ وبتعويضها في معادلة الدائرة العامة أو القياسية نحصل علي المعادلة المطلوبة .

أ. معادلة الدائرة التي تمر بثلاثة نقاط :

مثال (١) : أوجد معادلة الدائرة التي مركزها النقاط :

(٤ ، –١) ، (–٢ ، ١) ، (–٢ ، ٥) وأجد مركزها ونصف قطرها .

الحل :

قاعدة : أي نقطة تقع علي أي شكل هندسي (مستقيم ، منحنى ، دائرة) فهي تحقق معادلته أو بعبارة أخرى أي شكل هندسي يمر بنقطة فإن هذه النقطة تحقق معادلته .

∴الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث فإن هذه النقاط تحقق معادلة الدائرة في الصورة العامة.

∴ معادلة الدائرة في الصورة العامة هي : س^{٢}+ ص^{٢}+٢ل س + ٢ك ص + جـ = صفر

النقطة (٤ ، –١)تحقق معادلة الدائرة∴ (٤)^{٢} + (– ١) + ٢ل × ٤ + ٢ك × (–١) + جـ = صفر

∴ ١٦ + + ٨ل – ٢ك + جـ = صفر ⇐ ٨ ل – ٢ك + جـ = صفر ← (١)

وكذلك النقطة (–٢ ، ١) = (–٢)^{٢} + ١ + ٢ل – ٢ك × ١ + جـ ومنها –٤ ل + ٢ك + جـ = – ٥ ← (٢)

وبإجراء العملية (١) –(٢) نحصل على = ١٢ل – ٤ك = – ١٢ ← ٣ ل – ك= –٣ ← (٣)

وكذلك النقطة (−٢ ، ١) = (− ٢)^{٢} + (٥)^{٢}+ ٢ل × − ٢+ ٢ك × ٥ + جـ = − ٢٩(٣)

وبإجراء العملية : (٢) − (٤) نحصل على : صفر − ٨ ك = ٢٤ ⇐ ك= − ٣

بتعويض قيمة ك = −٣ في المعادلة (٣) نحصل على : ٣ل − (−٣) = −٣ ⇐ ل = −٢

بتعويض قيمتي ل ، ك في المعادلة (١) : ٨ × −٢− ٢× −٣ + جـ = −١٧

∴ جـ = − ٧ وبتعويض قيم ل ، ك ، جـ في الصورة العامة لمعادلة الدائرة نحصل على المعادلة المطلوبة كالآتي :

س^{٢} + ص^{٢} − ٢×٢س + ٢×−٣ ص −٧ =صفر ⇐ س^{٢} + ص^{٢} −٤س −٦ ص −٧ = صفر

(أوجد مركزها ونصف قطرها)

مثال (٢) :

دائرتان تمر كل منهما بالنقطتين (٢ ، ٠) ، (١٠ ، ٠) أوجد معادلة كل منهما إذا كان نصف قطر كل منهما ٥ وحدات .

الحل :

الصور العامة لمعادلة الدائرة هي : س^{٢}+ ص^{٢} −٢ل س + د^{٢} + − ٢ك ص + جـ = صفر

النقطة (٢ ، ٠) تحقق المعادلة : ٤ + ٠ + ٤ل + جـ = صفر ⇐ ٤ ل + جـ = − ٤ ⇐ (١)

(١٠ ، ٠) كذلك تحقق معاً ١٠٠ + ٠ + ٢٠ ل + جـ = صفر ⇐

٢٠ ل + جـ = − ١٠٠ ⇐ (٢)

(١) − (٢) =−١٦ ل=٩٦ ⇐ل= −٦ .

بتعويض ل = − ٦ في (١) ⇐ − ٢٤ + جـ= − ⇐جـ= ٢٠ .

∴ نق = $\sqrt{ل^{٢}+ك^{٢}-جـ}$ ⇐ نق = ٥ ، ل = − ٦ ، جـ = ٢٠

∴ ٥= (− ٦)^{٢}+ ك^{٢}−٢٠ بتربيع الطرفين : ٢٥ = ٣٦ + ك^{٢} − ٢٠⇐ ٩ = ك^{٢} ⇐ ك = + ٣ أو − ٣

بتعويض ل = − ٦ ، جـ = ٢٠ ، ك =٣ نحصل علي معادلة الدائرة الأولى :

س^{٢} + ص^{٢} −١٢س +٦ ص +٢٠ = صفر

بتعويض ل = −٦ ، جـ = ٢٠ ، ك = − ٣ نحصل علي معادلة الدائرة الثانية :

س^{٢} + ص^{٢} −١٢س −٦ ص +٢٠ = صفر

مثال (٣) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطتي تقاطع الدائرتين : س^{٢} + ص^{٢} + س −٥ ص +٤ = صفر س^{٢} + ص^{٢} −٢س + ص −٥ = صفر وتمر بالنقطة (١ ، ١) .

الحل :

بطرح معادلتي الدائرة نحصل على : ٣ س − ٦ص + ٩ = صفر ⇐ س − ٢ص + ٣ = صفر ومنها س =٢ص −٣ ⇐ (١) وبتعويض قيمة س من (١) في معادلة الدائرة الأولى نحصل على :

(٢ص − ٣)^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص −٣ − ٥ ص + ٤ = صـــفر ⇐ ٤ص^{٢} − ١٢ ص +٩ + ص^{٢} + ٢ ص − ٣ − ٥ ص + ٤ =صفر وبتجميع الجدود المتشابهة : ٥ ص^{٢} − ١٥ ص + ١٠ = صفر ⇐ ص^{٢} − ٣ ص + ٢=صفر

وبالتحليل نجد أن (ص −٢) (ص −١) = صفر ومنها ص=٢ أو ص = ١ عند ص= ٢ ومن المعادلة (١) س= ٤−٣ = ١

∴نقطة التقاطع الأولى هي : (١ ، ٢) ، وعند ص = ١ ، س = ٢− ٣

∴نقطة التقاطع الثانية هي : (−١ ، ١)

معادلة الدائرة في الصورة العامة هي : س^{٢}+ ص^{٢} −٢ل س + د^{٢} + − ٢ك ص + جـ = صفر

(١ ، ٢) تحقق معادلة الدائرة : ٥ + ٢ل + ٤ك + **جـ** = صفر ⇐ ٢ل + ٤ك + **جـ**= −٥ ⇐ (٢)

(− ١ ، ١) تحقق معادلة الدائرة :

١ + ١ − ٢ل + **٢ك** + جـ=صفر ⇐− ٢ل + **٢ك** + **جـ** =− ٢ ⇐ (٣)

(٢) − (٣) = ٤ل + **٢ك** = −٣ ⇐ (٤)

النقطة (١، ١) ٢ل + **٢ك** + **جـ** = −٢ ⇐ (٥)

(٢) – (٥) = ٢ل = –٣ ، ك = $-\frac{3}{2}$ ⟸ ومن (٤) عند ك = $-\frac{3}{2}$

∴ ٤ل + ٢ × $-\frac{3}{2}$ = –٣

∴ ٤ل = صفر ⟸ ل = صفر

بتعويض قيمتي ل ، ك في معادلة (٥) : ∴ صفر –٣ + جـ = –٢ ⟸ جـ = ١

بتعويض قيم ل ، ك ، جـ في الصورة العامة لمعادلة الدائرة نحصل على معادلة الدائرة المطلوبة وهي :

س^2 + ص^2 –٣ص+١ = صفر

مثال (٤) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل وتقطع محور السينات عند س = ٨ ومحور الصادات عند ص = ٦ .

الحل :

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : س^2+ ص^2 –٢ل س + د^2 + _ ٢ك ص + جـ = صفر

نقطة الأصل (٠ ، ٠) تحقق المعادلة : ٠ + ٠ + ٠ + ٠ + جـ =صفر ⟸ جـ = صفر

تقطع محور السينات عند س = ٨ تعني أن نقطة تقاطع الدائرة مع محور السينات هي (٨ ، ٠)

∴ (٨ ، ٠) تحقق المعادلة : ٦٤ + ٠ + ١٦ ل + ٠ + ٠ + جـ = صفر ⟸ ١٦ ل = – ٦٤

⟸ ل= ٤

تقطع محور الصادات عند ص = ٦ تعني أن نقطة تقاطع الدائرة مع محور الصادات هي (٠ ، ٦)

∴ (٠ ، ٦) تحقق المعادلة : ٠ + ٣٦ + ٠ + ٠ + ١٢ك + ٠ = صفر ⟸ ١٢ك = – ٣٦

⟸ ك = –٣

∴معادلة الدائرة هي : س^2+ ص^2 – ٨ س –٦ص = صفر

تمرين (٥ – ٤)

١. أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط (٢، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (–٤ ، ٣) .

٢. دائرة تقطع محور السينات عند س = ١ ومحور الصادات عند ص = ١ وتمر بنقطة الأصل أوجد معادلتها .

٣. الدائرتان : $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢$ – ٤ص –٦س + ٩ = صفر ، $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢$ – ٨ س –٦ص = ٢ص –٧ تتقاطعان في أ ، ب أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين أ ، ب ونقطة الأصل .

٥ – ٥ : معادلة الدائرة التي تمر برؤوس مثلث :

لإيجاد معادلة الدائرة المارة برؤوس مثلث نحاول أولاً إثبات أن المثلث قائم الزاوية فإذا كان المثلث قائم الزاوية فإن الوتر يمثل قطر في هذه الدائرة لذلك نهايتا الوتر يمثلان نهايتا قطر في الدائرة ونوجد معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها كما درسنا سابقاً

أما إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فنوجد معادلة الدائرة التي تمر برؤوسه بواسطة معادلة الدائرة التي تمر بثلاث نقاط كما في الدرس السابق .

مثال (١) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أ ، ب ، جـ حيث أ (٣ ،٢) ، ب (١ ،٢) ، جـ (٥ ،٤)

الحل :

نوجد أميال أضلاع المثلث : $\text{م}_{\text{أب}} = \frac{٢ - (-٢)}{٣ - ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $\text{م}_{\text{ب جـ}} = \frac{-٢ + ٤}{١ - ٥} = \frac{٢}{-٤} = -\frac{١}{٢}$

∴ $\text{م}_{\text{أب}} \times \text{م}_{\text{ب جـ}} = ٢ \times \frac{١}{٢} = -١$ وهو شرط التعامد ∴ أ ب عمودي على ب جـ

∴المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب : ∴ أ جـ وتر لهذا المثلث وهو قطر للدائرة التي تمر برؤوس المثلث ∴نوجد معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها حيث النهاية الأولى للقطر (٣، ٢) والنهاية الثانية هي (٤، ٥)

∴(س _ س$_{١}$) (س _س$_{٢}$) + (ص _ ص$_{١}$) (ص _ ص$_{٢}$) = صفر هي معادلة الدائرة بمعلومية نهايتا قطر فيها .

∴ معادلة الدائرة المطلوبة (س – ٣) (س – ٥) + (ص + ٤) (ص – ٢) = صفر ⇐

س^{٢} + ص^{٢} - ٨س + ٢ص +٧ =صفر

مثال (٢) :

إذا كانت أ (٤ ، ٤) ، ب (٢ ، ٤) ، جـ (٢ ، ١) أثبت أن المثلث قائم الزاوية وأوجد معادلة الدائرة التي تمر برؤوسه الثلاث .

الحل : م$_{أ ب}$ = $\frac{\text{٤-٤}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{٢}}$ = صفر ، م$_{ب جـ}$ = $\frac{\text{٤ -١}}{\text{٢ -٢}}$ = $\frac{\text{٣}}{\text{صفر}}$ = ∞

∴ المثلث قائم الزاوية في ب لأن أب عمودي على ب جـ (لماذا)

∴ معادلة الدائرة بعلومية نهايتا قطر فيها هي :

(س _ س$_{١}$) (س _س$_{٢}$) + (ص _ ص$_{١}$) (ص _ ص$_{٢}$) = صفر

∴ معادلة الدائرة المطلوبة (س-٤) (س – ٢) + (ص -٤) (ص – ١) = صفر ⇐

س^{٢} + ص^{٢} -٦س + ٥ ص +١٢ =صفر

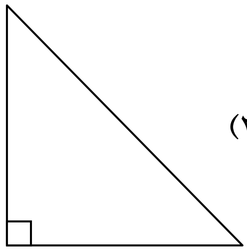
مثال (٣)

أ ب جـ مثلث معادلات أضلاعه : س + ٢ص = ٤ ، ٢س – ص = ٣ ، س – ص + ٢= صفر برهن أن المثلث قائم الزاوية وأوجد معادلة الدائرة التي تمر برؤوسه .

الحل :

م$_{١}$ = ميل المستقيم الأول = $\frac{\text{-١}}{\text{٢}}$ ، م$_{٢}$ = ميل المستقيم الثاني = $\frac{\text{-٢}}{\text{-١}}$ = ٢

∴ م$_{١}$ × م$_{٢}$ = $\frac{\text{-١}}{\text{٢}}$



∴ المستقيم الأول عمودي على المستقيم الثاني وبذلك يكون المثلث قائم الزاوية وتكون معادلة المستقيم الثالث (٣) هي معادلة الوتر ، ولإيجاد معادلة الدائرة التي تمر برؤوسه نوجد إحداثيات نهايتي الوتر أجـ كالآتي :

بحل معادلة المستقيم (١) مع المستقيم (٣) لإيجاد إحداثي أ :

∴ (١) – (٣) : - ٣ ص = - ٦ ومنها ص = ٢ وبتعويض ص = ٢ في (٣) نحصل على س –٢ + ٢ = صفر ومنها س = صفر ∴ النقطة أ (٠ ، ٢) .

ولإيجاد إحداثي جـ نحل معادلتي (٢) و (٣) وبالطرح (٢) – (٣) : س =٥ وبالتعويض عن قيمة س= ٥ في (٣) نحصل على ٥ – ص + ٢ = صفر ومنها ص = ٧

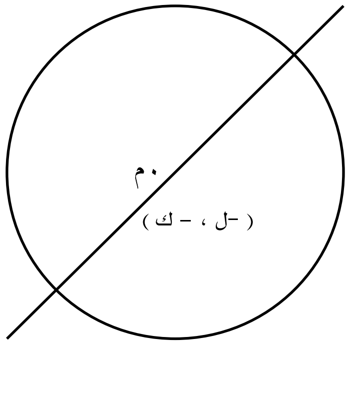
∴ النقطة هي (٥ ، ٧) .

وبذلك تكون معادلة الدائرة هي : (س – ٠) (س – ٥) + (ص – ٢) (ص – ٧) = صفر ⇐ س^{٢} + ص^{٢} –٥ س –٩ ص +١٤ =صفر

تمرين ٥ – ٥ :

١. النقاط أ (–٢ ، –١) ، ب (٢ ، –٢) ، جـ (٣ ، ٢) تمثل رؤوس مثلث : (I) أثبت أنه قائم الزاوية (I I) أوجد مساحته (I I I) أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوسه الثلاثة (Iv) أوجد مركزها ونصف قطرها .

٢. برهن أن المثلث أب جـ الذي فيه أ (٣ ، –١) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (١ ، ٢) قائم الزاوية ثم أوجد معادلة الدائرة المارة برؤوسه الثلاثة وأوجد مركزها ونصف قطرها .



٣. أب جـ مثلث فيه معادلة أ ب هي ص – ١ = صفر ، ومعادلة ب جـ = ص – س – ٢= صفر ،

ومعادلة ﺃ ﺟ هي ص + س – ٢= صفر أثبت أنه قائم الزاوية .

وأوجد معادلة الدائرة التي تمر برؤوسه الثلاثة .

٥ – ٦ : معادلة الدائرة التي يقع مركزها على مستقيم معلوم المعادلة :

١. معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم أ س + ب ص + جـ = صفر

معلوم أن مركز الدائرة هو (– ل ، – ك) فإذا وقع مركز الدائرة على المستقيم

أ س + ب ص + ﺟ = صفر فهو يعني أن إحداثيات المركز (– ل ، – ك)

تحقق معادلة المستقيم ، وبذلك تصبح معادلة المستقيم كالآتي :

– ﺃ ل – ب ك + ﺟ = صفر ويعتبر هذا شرط هندسي إذا انضم إليه شرطان

هندسيان يمكن إيجاد معادلة الدائرة كما يتضح ذلك من الأمثلة التالية :

مثال (١) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٢ ، –١) ، (١ ، ٢) ويقع مركزها على المستقيم س – ص =١

الحل :

معادلة الدائرة في الصورة العامة : س^{٢}+ ص^{٢} +٢ل س + د^{٢} + + ٢ك ص + ﺟ = صفر

النقطة (٢ ، –١) تحقق معادلة الدائرة : ٤ + ١ + ٤ ل – ٢ك + ﺟ = صفر ⇐

٤ ل –٢ ك + ﺟ = صفر ← (١)

النقطة (١ ، ٢) تحقق معادلة الدائرة : ٤ + ١ + ٢ل + ٤ ك + ﺟ = صفر ⇐

٢ل +٤ ك + ﺟ = صفر ← (٢)

نطرح (١) – (٢) = ٢ل –٦ ك = صفر ⇐ ل = ٣ ك ← (٣)

الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم س – ص = ١ ← إحداثيات المركز تحقق معادلة المستقيم وذلك باستبدال س = (– ل) وص = – ك نحصل على – ل + ك = ١ ← ك = ١ + ل ← (٤) وبحل (٣) و (٤) آنياً نحصل على :

ل = ٣ (١ + ل) ← ل = ٣ + ٣ل ← ل = − $\frac{٣}{٢}$ ومن (٤) عند ل = − $\frac{٣}{٢}$ ، **ك** = − $\frac{١}{٢}$

ولإيجاد ج نعوض قيمتي ل ، ك في (١) : ٤ × − $\frac{٣}{٢}$ −٢× − $\frac{١}{٢}$ + **جـ** = −٥ ← **جـ** = صفر

∴ معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} −٣س − ص = صفر

مثال (٢) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطتي تقاطع المستقيم ص = س + ١ مع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٨س −٢ص +٧ =صفر علماً بأن مركزها يقع على المستقيم ص = س − ١

الحل :

نوجد نقطتي تقاطع المستقيم والدائرة بحل معادلتيهما آنياً وذلك بتعويض ص = س + ١ في معادلة الدائرة :

س^{٢} + (س + ١)^{٢} −٨ س −٢(س + ١) +٧ =صفر ← ٢ س^{٢}− ٨س + ٦ = صفر ⇐

س^{٢}−٤س + ٣ = صفر

وبالتحليل نحصل على (س − ٣) (س − ١) = صفر ومنها س = ٣ ، س = ١ ومن المستقيم عند س= ٣ ← ص= ٤ ∴ نقطة التقاطع الأولى هي ((٣ ، ٤) ، وعند س = ١

∴ص = ٢ ومنها النقطة الثانية للتقاطع هي (١ ، ٢)

∴الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : س^{٢}+ ص^{٢} +٢ل س + د^{٢} + ٢ **ك** ص +**جـ** = صفر

(٣ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة ومنها :

٩ + ١٦ + ٦ ل + ٨ **ك** + **جـ** =صفر ⇐٦ل + ٨ **ك** + **جـ** = − ٢٥← (١)

(١ ، ٢) تحقق معادلة الدائرة : ١ + ٤ + ٢ ل + ٤ **ك** + **جـ** =صفر ⇐ ٢ ل + ٤ **ك** + **جـ** = −٥ ← (٢)

(١) − (٢) : ٤ ل + ٤ **ك** = − ٢٠ ⇐ ل + **ك** = − ٥ ← (٣)

إحداثيات المركز (− ل ، − ك) تحقق معادلة المستقيم ص = س −١

∴ − **ك** = − ل −١ ⇐ **ك** = ل + ١← (٤)

وبحل (٣) ، (٤) آنياً :

∴ ل + ل = – ٥ ⇐ ٢ل = – ٦ ⇐ ل = –٣ ، ومن (٣) عند ل = –٣

∴ ك = –٢ بتعويض قيمتي ل ، ك في (٢) نحصل على قيمة جـ كالآتي :

٢ × – ٣ + ٤ × –٢ + جـ = – ٥ ⇐جـ =٩

∴ معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} –٦س –٤ص +٩ =صفر

مثال (٣) :

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٥ ، ٤) ويقع مركزها على المستقيمين : س + ص = ٥ ، ٢س – ص = ٤ .

الحل :

معادلة الدائرة في الصورة العامة هي : س^{٢}+ ص^{٢} +٢ل س + د^{٢} + + ٢ك ص + جـ = صفر

(٥ ، ٤) تحقق معادلة الدائرة : ٢٥ + ١٦ + ١٠ ل + ٨ ك + جـ =صفر ⇐ ١٠ ل + ٨ ك + جـ = –٤١← (١)

إحداثيات المركز (– ل ، – ك) تحقق معادلة المستقيم ص + س = ٥

∴ – ك – ل=٥←(٢)

(– ل ، – ك) تحقق معادلة المستقيم ٢س – ص = ٤

∴ –٢ل + ك =٤ ←(٣)

وبالجمع : (٢) + (٣) : – ٣ ل = ٩ ⇐ ل = – ٣ ومن (٢) عند ل= – ٣ ∴ ك = ٢

وبتعويض قيمتي ل ، ك في (١) نحصل على قيمة جـ كالآتي ١٠ × –٣ + ٨× –٢ +جـ =٤١

⇐ –٣٠ +١٦ + جـ = – ٤١ ومنها جـ = ٧

∴ معادلة الدائرة هي : س^{٢}+ ص^{٢}– ٦ س – ٤ ص + ٧ = صفر

معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المحور السيني

معلوم أن معادلة المحور السيني هي ص = صفر و ∴ الدائرة التي يقع مركزها على المحور السيني .

∴ إحداثيات المركز (– ل ، – ك) تحقق معادلة المستقيم ص = صفر ومنها – ك = صفر

∴ ك = صفر

مثال (٤):

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٥ ، ٠) ، (٣ ، –٢) ويقع مركزها على محور السينات ، ثم أوجد النقط التي تقطع فيها الدائرة محور السينات .

الحل :

معادلة الدائرة في الصورة العامة : س^{٢}+ ص^{٢} +٢ل س + ٢كص+جـ = صفر

(٥ ، ٠) تحقق معادلة الدائرة : ٢٥ + ٠ + ١٠ ل + ٠ + جـ =صفر ⟸ ١٠ل + جـ = –٢٥⟵ (١)

(٣ ، –٢) تحقق معادلة الدائرة : ٩ + ٤ + ٢×٣ ل + ٢×–٢ك + جـ =صفر ⟸ ٦ل –٤ ك + جـ = –١٣⟵ (٢)

وبالطرح (١) – (٢) ٤ ل +٤ ك + جـ = –١٢ ومنها ل + ك = –٣ ⟵ (٣)

يقع مركزها على محور السينات ∴إحداثيات المركز (– ل ، – ك) تحقق معادلة المستقيم ص = صفر ومنها – ك = صفر ∴ ك = صفر ومن (٣) ل = –٣ ومن (١) عند ل= –٣ ∴ ١ × – ٣ + جـ = –٢٥ ⟸ جـ = ٥

∴ معادلة الدائرة هي : س^{٢} + ص^{٢} –٦ س +٥ =صفر

لإيجاد النقط التي تقطع فيها الدائرة محور السينات نعوض ص= صفر في معادلة الدائرة :

∴ معادلة الدائرة هي : س^{٢} –٦ س +٥ =صفر وبالتحليل (س –١) (س –٥) = صفر ⟸ س = ٥ ، ١

∴ النقط هي (٥ ، ٠) ، (١ ، ٠) .

معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المحور الصادي :

• ومعادلة المحور الصادي هي س = صفر و إحداثيات المركز (– ل ، – ك)
تحقق معادلته ∴ – ل = صفر ⇐ل =صفر .

مثال (٥) :

أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور الصادات وتمر بالنقطة (٠ ، ٣) ونصف قطرها = ٥ (هناك دائرتان)

الحل :

الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي : $س^{٢}+ ص^{٢} + ٢ل س + ٢ك ص + جـ =$ صفر

(٠، ٣) تحقق معادلة الدائرة : ٠+ ٩ + ٠ + ٦ ك + جـ = صفر ⇐ ٦ك + جـ = –٩ ← (١)

الدائرة التي يقع مركزها على محور الصادات ∴ إحداثيات المركز (–ل ، –ك) تحقق المعادلة ومنها : س = صفر ، ل = صفر

نق = ٥ لكن نق = $\sqrt{ل^{٢}+ ك^{٢} - جـ}$ ⇐ ٥= ٠ + $ك^{٢}$ – جـ ← (٢)

من معادلة (١) جـ = – ٦ ك – ٩ وبتعويض قيمة جـ = – ٦ ك – ٩ في (٢) نحصل على :

٥= $\sqrt{ك^{٢} -(- ٦ك -٩)}$ وبتربيع الطرفين نحصل على ٢٥ = $ك^{٢}$ + ٦ ك + ٩ ومنها :

$ك^{٢}$ + ٦ ك –١٦= صفر

وبالتحليل (ك + ٨) (ك – ٢) = صفر

∴ ك = –٨ ، ٢ ومن (١) عند ك= –٨

∴ ٦ × –٨ + جـ = –٩ ومنها جـ = ٣٩ .

وبتعويض قيمتي ك = –٨ ، جـ = ٣٩ تكون معادلة الدائرة الأولى هي :

$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ –١٦ ص +٣٩ = صفر

ومن (١) عند ك = ٢ ∴ ٦ × ٢ + جـ = – ٩ ومنها جـ = –٢١

وبتعويض قيمتي ك = ٢ ، جـ = – ٢١ تكون معادلة الدائرة الثانية هي :

$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ + ٤ ص –٢١ =صفر

تمرين (٥ – ٦) :

١. أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة (٠ ، ٢) ونقطة الأصل ويقع مركزها على المستقيم س + ص =١

٢. أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطتي تقاطع المستقيم ص = س + ١ مع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} –٤س –٥ = صفر ويقع مركزها على المستقيم ص= س – ٤ أوجد مركزها ونصف قطرها .

٣. أوجد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على محور السينات تمر بالنقطتين (٣ ، ٥) ، (– ٣ ، ٧) .

٤. أب جـ مثلث فيه معادلة أ ب هي س + ٢ص = ٨ ، معادلة ب جـ هي ص– ٢س =٤ ، معادلة أ جـ هي ٤ص – ٣س = ٦ أوجد معادلة الدائرة التي تمر بروؤسه الثلاثة وأثبت أن مركزها يقع على محور الصادات.

٥. المنحنى ص^{٢} = س يقطع الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = ٢ عند النقطتين أ و ب أوجد معادلة الدائرة المنشأة على أ ب كقطر وبرهن أن مركزها يقع على محور السينات .

❖❖❖ الخلاصة❖❖❖❖❖ :

هذا أخي الطالب منهج الهندسة التحليلية المقرر على طلاب الشهادة الثانوية العالمية يشتمل على الخط المستقيم ومعادلاته ثم الدائرة ومعادلاتها المختلفة وهو منهج معين للطلاب في دراسته الجامعية إذ أنه يمثل الأساس الذي يبني عليه الطالب دراسته اللاحقة .

إجابات التمرينات :

تمرين (٥ – ١)

تمرين (١) :

١. س^{٢} + ص^{٢} –٤س –١٠ص + ١٣ = صفر
٢. س^{٢} + ص^{٢} –٦س + ٤ ص –١٢ =صفر
٣. س^{٢} + ص^{٢} –٨ س –١٢ ص +١٦ =صفر
٤. س^{٢} + ص^{٢} =٨
٥. س^{٢} + ص^{٢} =١٠٠

تمرين (٥ – ٢)

تمرين (٢) :

١. م = (٣ ، –٢) ، نق = ٤
٢. م = (–$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) ، نق = $\frac{٢}{٢}$
٣. م = (–١ ، $\frac{١}{٢}$) ، نق = $\frac{٢٧٦}{١٢}$
٤. المعادلة تمثل دائرة لأن معامل س^{٢} = ص^{٢} ، معادلة من الدرجة الثانية في مجهولين س ، ص ، خالية من الحد س ص . م = (١ ، ٠) ، نق = ٢
٥. م = (٢ ، –١) ، نق = ١٠

تمرين (٥ – ٣)

تمرين (٣) :

١. س^{٢} + ص^{٢} –٧س – ٢ص +٧ = صفر

٢. س^{٢} + ص^{٢} –٢ص –٤٩ = صفر

تمرين (٥ – ٤)

تمرين (٤) :

١. س^{٢} + ص^{٢} +٢س + ٢ص – ٢٣ = صفر

٢. س^{٢} + ص^{٢} –١٥س + ٥ص = صفر

تمرين (٥ – ٥)

تمرين (٥) :

(١) م$_{أب}$ = – $\frac{١}{٤}$ ، م$_{ب جـ}$ = ٤ ∴ م$_{أب}$ × م$_{ب جـ}$ = – $\frac{١}{٤}$ × ٤ = –١ وهو شرط تعامد المستقيمين ∴ أ ب عمودي على ب جـ . ∴ المثلث قائم الزاوية في ب .

٣. مساحته = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ = $\frac{١٧}{٢}$ وحدة مربعة .

٣. س^{٢} + ص^{٢} – س – ص –٨ = صفر

٤. م = ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) ، نق = $\sqrt{\frac{٣٤}{٢}}$

(٢) م$_{أ ب}$ = ∞ ، م$_{ب جـ}$ = صفر ∴ أ ب // المحور الصادي ، ب جـ // للمحور السيني ∴ أ ب عمودي على ب جـ ∴ المثلث قائم الزاوية في ب .

معادلة الدائرة المارة برؤوسه هي : س^{٢} + ص^{٢}- ٤ س – ٦ص +١١= صفر ، م = (٢ ، ٣)

نق = $\sqrt{٢}$.

٥ . م$_{ب جـ}$ = ١ ، م$_{أ جـ}$ = –١ ∴ ب جـ = عمودي على أ جـ ∴ المثلث قائم الزاوية في جـ (شرط التعامد) .

معادلة الدائرة المارة برؤوسه هي : س^{٢} + ص^{٢} – ٢ص =صفر

تمرين (٥ – ٦)

تمرين (٦) :

١. : س^{٢} + ص^{٢} – ٢ص =صفر

٢. س^{٢} + ص^{٢} –٦س + ٢ص – ٧ =صفر ، م = (٣ ، – ١) ، **نق** = √١٧

٣. س^{٢} + ص^{٢} +٤س – ٤٦ =صفر

٤. س^{٢}+ ص^{٢} – ٣ص – ٤ =صفر ∴ الحد ٢ ل س = صفر

(ل = صفر يقع مركزها على محور الصادات)

٥. س^{٢} + ص^{٢} –٢س =صفر ∴ الحد ٢ ك ص = صفر

(ك = صفر يقع مركزها على محور السينات)

****

الحمد لله

٢٤ / ١٢/ ٢٠٠٠