بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة إفريقيا العالمية

مجلس الشهادة الثانوية العالمية

الأمانة العامة

الرياضيات

الرياضيات الأولية (أدبي)

(الجبر - الهندسة التحليلية - الإحصاء)

إعداد الأساتذة :

أ. منصور مجذوب الحجاز   د. محمد الجلي محمد سليمان

أ. محمد الفاتح كمال الدين

المراجعة اللغوية :

أ. محمد إسماعيل البلي

التصميم والإخراج الفني :

أ. طارق فاروق عبدالله هارون

جمع كمبيوتر :

الفاتح محمد فرح عبدالله

المحتويات

المـــــــــوضوع	الصفحة
تصدير	٣
المقدمة	٤
إسهامات بعض علماء المسلمين في علم الرياضيات	٥ – ٨
الوحدة الأولى: الجبر	١٢ – ٤٢
الوحدة الثانية: الهندسة التحليلية	٤٣ – ٦٣
الوحدة الثالثة: الإحصـــــاء	٦٥ – ٧٣

بسم الله الرحمن الرحيم

تصـــدير :

يسر الأمانة العامة للشهادة الثانوية العالمية أن تصدر هذا الكتاب ضمن سلسلة كتب مفردات الشهادة الثانوية العالمية تسهيلاً للطلاب الذين سيجلسون للامتحان لدراسة هذه المقررات والتعرف على مفرداتها .

إن إصدار هذه السلسلة من الكتب تطلب مجهوداً كبيراً ، حيث عكفت مجموعة من الأساتذة المختصين لصياغة المقررات وفق البناء المنهجي الذي أقره مجلس الشهادة الثانوية في اجتماعه بالخرطوم بتاريخ ٢/١٠/٢٠٠١م ، وحيث إن هؤلاء الأساتذة لم يدخروا وسعاً في التأليف والمراجعة والتمحيص لمادة الكتاب ، فإننا نأمل أن تكون معيناً للطلاب في مزيد من التحصيل والمعرفة .

والأمانة العامة إذ تصدر هذه الكتب تعد بأن يستمر جهدها في التنقيح والتجويد والتجديد لمزيد من ترقية الأداء وتطويره حتى يكتمل مشروع انتشار هذه الشهادة التي تهدف لتوسيع رقعة المعرفة وزيادة عدد العارفين .

تتقدم الأمانة العامة بجزيل شكرها للأخوة الأساتذة الذين سكبوا عصارة تجاربهم في مجال التعليم في هذه المؤلفات ونسأل الله أن يتقبل جهدهم وينفع به طلاب العلم ويعمر به رحاب الدنيا علماً وتقوى إنه ولي ذلك والقادر عليه .

د. كمال محمد عبيد

الأمين العام

للشهادة الثانوية العالمية

٣ يناير ٢٠٠٢م

مُقَدِّمَة :

الطالب الكريم :

بين يديك المقرر الأول في الرياضيات الأولية (أدبي) (الجبر و الهندسة التحليلية والإحصاء) لطلاب الشهادة الثانوية العالمية . ويتكون من الأبواب التالية :

- مقدمة عن إسهامات بعض علماء المسلمين في علم الرياضيات .
- الوحدة الأولى: الجبر ، وتشمل: (موضعات في الحساب ، التحليل ، المتواليات ، المتباينات) .
- الوحدة الثانية: الهندسة التحليلية ، وتشمل:(المسافة بين نقطتين ، إحداثيات نقطة تقسيم قطعة مستقيمة ، ميل الخط المستقيم والمار بنقطتين، المستقيمات المتوازية والمتعامدة ، معادلات الخطة المستقيم) .
- الوحدة الثالثة: الإحصاء ، وتشمل: (عرض البيانات الإحصائية، مقاييس النزعة المركزية من بيانات مبوبة وجدول تكراري) .

وتجد في كل وحدة الأسئلة الخاصة بها ، وكذلك أجوبة كل وحدة في نهايتها ، نرجو من الطلاب بالبدء في حل التمارين ثم التأكد من صحة إجاباته بمراجعه الإجابات المثبتة في نهاية كل وحدة .

والله ولي التوفيق

المؤلفون

إسهامات بعض علماء المسلمين في علم الرياضيات

الحمد لله الذي علم بالقلم علم الإنسان ما لم يعلم و الصلاة والسلام على النبي الأكرم المبعوث رحمة للأمم الذي قال:" **إنما بعثت معلما** " وعلى اله وأصحابه أهل الهمم .

وبعد؛؛؛

فإن الرياضيات من المواد التي يحس الإنسان بحاجة إليها في حياته اليومية وترتبط بالميل الطبيعي له منذ أن أدرك انه مضطر لمعرفة ماله وما عليه وان يحسب ما لديه من نقود كما اضطر أن يحسب حسابا دقيقا للزمن وكل ما يحيط به وقد أخذت في الازدياد في الدقة والتعقيد بتقدم الإنسان في ركب الحضارة حتى أصبح في عالمنا اليوم الإلمام بالتعامل مع الحاسب الآلي Computer من الضرورة بمكانه ولم ينس المسلمون أن ينهلوا من هذا المجال. كيف لا وقد حثهم القران الكريم و السنة النبوية المطهرة على العلم . وان يلموا بالعلوم الدينية وكذلك الدنيوية التي تعينهم على أمر معاشهم ومنها الحساب فقد جاء ذكر الحساب في كتاب الله سبحانه وتعالى وذلك في قوله: ﴿ **وَجَعَلْنَا ٱلَّيْلَ وَٱلنَّهَارَ ءَايَتَيْنِ فَمَحَوْنَآ ءَايَةَ ٱلَّيْلِ وَجَعَلْنَآ ءَايَةَ ٱلنَّهَارِ مُبْصِرَةً لِّتَبْتَغُوا۟ فَضْلًا مِّن رَّبِّكُمْ وَلِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ وَكُلَّ شَىْءٍ فَصَّلْنَٰهُ تَفْصِيلًا** ﴾[1]، وقوله تعالى:﴿ **مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَٰلَهُمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِى كُلِّ سُنۢبُلَةٍ مِّا۟ئَةُ حَبَّةٍ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ** ﴾[2]. وهنا عملية مضاعفه أو ضرب (١×٧×١٠٠=٧٠٠حبه)، وقوله تعالى: ﴿ **وَلَبِثُوا۟ فِى كَهْفِهِمْ ثَلَٰثَ مِا۟ئَةٍ سِنِينَ وَٱزْدَادُوا۟ تِسْعًا** ﴾[3]، وهنا عملية جمع (٣٠٠ + ٩) ليصبح المجموع (٣٠٩) سنه . وكذلك قوله تعالى: ﴿ **إِنَّ عِدَّةَ ٱلشُّهُورِ عِندَ ٱللَّهِ ٱثْنَا عَشَرَ شَهْرًا فِى كِتَٰبِ ٱللَّهِ يَوْمَ خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ مِنْهَآ أَرْبَعَةٌ حُرُمٌ** ﴾[4] ، وهنا

---

[1] الآية (١٢) الإسراء .
[2] الآية (٢٦١) البقرة .
[3] الآية (٢٥) الكهف .
[4] الآية (٣٦) التوبة .

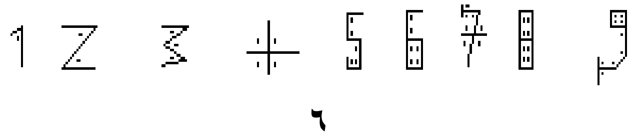
يمكن معرفة الأشهر غير الحرم بعملية الطرح (١٢-٤)= ٨ أشهر غير حرم وهذه بعض العمليات الرياضية الأساسية .

أمـا في الفقـه الإسـلامي فقـد احتـل اسـتخدام الرياضـيات مـساحة واسـعة ومكانه عظيمة إذا اعتمدت عليه أبواب كثيرة في معالجة مسائلها للوفاء بحق الله سبحانه وتعالى مثل أبواب الزكاة والميراث .

لذلك نالت الرياضيات اهتمام المسلمين وعنـايتهم فقـد ترجمـوا كتـب اليونـان إلى اللغـة العربيـة وفهمـوا مـا كتبـه اقليـدس وفيثـاغورث وغيرهـم وأضـافوا إليهـا إضـافات هامـة أثـارت إعجـاب علمـاء الغـرب ودهـشتهم فـاعترفوا بفـضل المـسلمين أثرهم الكبير في خدمة العلم والعمـران . فقـد اطلـع المسلمون علـى الحـساب الـذي كـان يستعمله الهنود ورأوا أنه افضل من نظام الترقيم بحساب الجمـل الـذي كـان معروفـا عنـدهم . وكـان للهنود أشـكالا عديـدة للأرقـام هـذب العـرب سلـسلتين منهـا همـا الأرقـام الهنديـة: (١، ٢ ، ٣، ٤، ...) المستعملة الآن في كـثير مـن أقطـار المشرق العربـي والإسـلامي ، والأرقـام الغباريه (....,4 , 3 , 2 , 1) ، والـتي انتشر استعمالها في بلاد المغرب العربي والأندلس ومنهـا انتقلت بواسـطة المعـاملات التجارية إلى البلدان الأوربية وعرفت باسم الأرقام العربية Arabic Numerals وقبلـها كـان الغربيـون يستخدمون الأرقـام الرومانيـة الـتي تتطلـب جهـدا كـبيرا لأجـراء ابسط العمليات الرياضية (... ,I , II , III , IV , V , VI) .

اخذ المسلمون هذه الأرقام أضـافوا إليهـا الـصفر ورمـزوا إليـه بـدائرة داخلـها نقطه ⊙ فاخز عرب المشرق النقطة وتركوا الدائرة واخـز عـرب المغـرب الـدائرة وتركـوا النقطـة وبذلك بدأت ولادة العد العشري الذي يـسر كـثيرا مـن العمليـات الحسابية التي كانت تتم بصعوبة بدون الصفر . وقد نقل الأوربيين هـذه الكلمـة إلى لغـاتهم بـنفس الـصوت العربـي فـسموهـا zyphyr أو cipher ثـم اختـصروها إلى كلمه zero .

ويرى بعض العلماء إن السلسة الغبارية رتبت على أساس الزوايا فالرقم (1) يحتوى على زاوية واحدة والرقم (Z) يحتوى على زاويتين وهكذا .



ثم دخل عليها تغيير بسيط فأصبحت في الشكل المعروف (...., 4 , 3 , 2 , 1)، ويرى آخرون أنها تفرض من بعض الحروف العربية وقد جمعها بعض في قوله :

ألف وحـاء ثم حـج بعـــده عين وبعد العين عـو ترســم
هاء وبعد الهاء شكل ظاهـر يبدو كمخطاف إذا هو يرقم
صفران وثامنها وقد ضما معا والواو تاسعهـا بـذلك تخـتم

9 8 7 6 δ + ℑ z 1

9 8 7 6 5 4 3 2 1

والمسلمون هم الذين وضعوا علامة الكسر العشري وعرفوا شيئاً عن الكسور فهي تنسب إلى العالم الرياضي غياث الدين جمشيد الكاشى وقد أورد في كتابه (الرسالة المحيطية) النسبة بين محيط الدائرة وقطرها (-π) بالكسر العشري وقد أعطى قيمة (٢ -π) صحيحة لستة عشر رقما عشريا حيث وجد أن: (٢ط = ٦,٢٨٣١٨٥٠٧١٧٩٥٨٦٥)، ولم يسبقه أحد لهذا الرقم بهذه الدقة المتناهية . وللمسلمين كتابات في الجمع والطرح والضرب والقسمة والكسور واستخراج الجذور والمسلمون هم أول من أطلق لفظ جبر على العلم المعروف الآن بهذا الاسم في كل اللغات الأجنبية Algebra وهو علم عربي بحت وأول من ألف فيه هو محمد بن موسى الخوارزمي في كتابه (الجبر والمقابلة) وتكلم في الجذر التخيلي ويعرف عند الفرنج باسم Algorithm .

وابتكر العرب طريقه هندسية لحل بعض معادلات الدرجة الثانية واكتشفوا النظرية القائلة إن مجموع مكعبين لا يكون عدد مكعبا . ومهد بن حمزة الطريق لمن بعده لاكتشاف اللوغريتمات وذلك حين وجد علاقة بين أسس أساسات حدود المتواليات الهندسية وحدود المتوالية العددية الذي صار يعرف فيما بعد (لوغريتمات حدود أي متواليات هندسية مثل متواليات عدديه) وترجم العرب كتاب أقليدس وفهموه جيداً وسموه كتاب الأصول وشجعهم على ذلك الخليفة المأمون عندما انشأ داراً للترجمة سماها (دار الحكمة) ومن هؤلاء العلماء بن الهيثم الذي أتى إلى مسائل أدت إلى استخدام الهندسة ووضع مقالة (استخراج سمت القبله) وكان للمسلمين إسهامات في علم الجبر والهندسة ولهم كذلك إسهامات في حساب المثلثات مثل بن يونس الذي توصل ألي أن: **جتاس جتاص= $\frac{١}{٢}$ جتا(س+ص)+ $\frac{١}{٢}$ جتـا(س− ص)** ، وضع

جابر بن الافلح نظريه عرفت (بنظرته جابر) في المثلث القائم الزاوية وهى أن: **جتاأ = جتاأ جتاب** (حيث ج هي الزاوي القائمة) وأوجد أبو الوفاء البوزجانى بعض العلاقات المثلثية وهو أول من وضع النسبة المثلثية للظل وأول من استعملها في حل المسائل الرياضية وادخل البتاني الذي كان يعرف عند الفرنج باسم Albategni, Albataginus ادخل دوال الظل وظل التمام وعمل جدولا لظل التمام بدلالة الدرجات وحسب جداول ظل التمام على أساس العلاقة ظتاأ $\frac{\text{جتاأ}}{\text{جا أ}}$ وهو أول من ادخل كلمة الجيب واستعملتها .

وعين البيرونى طول محيط الكره الأرضية بمعادلة سميت عند الفرنج (بقاعدة البيرونى) وبالاستعانة بالرياضيات تمكن من تحديد سمت القبلة في جميع أنحاء العالم .

واشتغل القلصاوى بالحساب وألف فيه تأليف نفيسة واستعمل لكلمة جذر الحرف الأول من كلمة (جذر حـ) وقد استعمل الفرنج هذا الحرف كرمز للجذر بعد إدارته **٩٠** درجه ناحية اليمين (√) ، واشتهر أبناء موسى بعلم الييل وهو ما يعرف الآن بعلم الميكانيكا وكان لهم فيه إسهامات مقدرة .

١٠-١: الوحدة الأولى

الجـــــبر

١-١: موضوعات في الحساب

١-٢: التحليل

١-٣: المـــتواليات

التعريف:

هى عبارة عن كميات تخضع في تكوينها لنظام معـين (ثـابت) فمـثلا: ٣، ٥، ٧، ٩، ... تـسمى (م . ع) (متواليــة عدديــة)، ٢ ، ٦، ١٨ ، ... (م . هـ) (متوالية هندسية).

١-٣-١/ المتواليات العددية :

التعريف :

هى التى يتكون أي حد من حدودها بإضافة كميه ثابتة للحد السابق لـه مباشرة تسمـى الكمـيه الثابتة بأساس المتوالية أو الفرق الثابت .

فمـثلا : ٥ ، ٥ ، ١١، ... متوالية عدديه أساسها (٣) .

أساس المتوالية = أي حد فيها – الحد السابق له مباشرة

ففي أي متوالية عدديه فان :

الأساس = $ح_٢$ – $ح_١$ = $ح_٣$ – $ح_٢$ = ... = $ح_ن$ – $ح_{ن-١}$ = فرق ثابت .

الصورة العامة للمتوالية العددية (الحد العام) :

إذا رمزنـا للحـد الأول (ح) بـالرمز أ وللأسـاس بـالرمز (د) فـان الـصورة العـامة هي : (أ ، أ + د ، أ+٢د ، .... ، ل) .

استنتاج الحد العام : $ح_١$ = أ + د (١-١) = أ

$ح_٢$ = أ + د (٢-١) = أ + د

$ح_٣$ = أ + د (٣-١) = أ + ٢د

$ح_٧$ = أ + ٦د

$ح_٩$ = أ + ٨د

$ح_{٢٠}$ = أ + ١٩د

ح$_{ن}$ = أ + د (ن − ١) ← ١

وهذا يسمى بالحد النوني أو الحد العام أو الحد الأخير في المتوالية العددية .

ل = أ + د (ن − ١) ← ٢

حيث أن: ل: هو الحد الأخير ، أ = الحد الأول ، د = الفرق الثابت ، ن = عدد الحدود .

مثال (١):

في المتوالية ٥ ، ٨ ، ١١ ، .... ، أوجد :

أ/ الحد السادس عشر ب/ الحد النوني

الحل :

أ = ٥ ، د = ٨ − ٥ = ٣

أ/ ح$_{١٦}$ = أ + ١٥د

= ٥ + ١٥ × ٣

= ٥ + ٤٥ = ٥٠

ب/ ح$_{ن}$ = أ + د (ن − ١)

= ٥ + ٣ (ن − ١)

= ٥ + ٣ن − ٣ ∴ ح$_{ن}$ = ٣ن + ٢

مثال (٢) :

متوالية عدديه حدها الأول ١٠ ، وحدها العشرين ١٢٤ ، أوجد أساسها ثم أوجد ح$_{٢ن}$.

الحل :

ح$_{١}$ = ١٠ ← ∴ أ = ١٠ (١)

ح$_{٢٠}$ = ١٢٤ ← أ + ١٩د = ١٢٤ (٢)

بتعويض (١) في (٢) ١٠ + ١٩د = ١٢٤

١٩د = ١١٤ ∴ د = $\frac{١١٤}{١٩}$ ∴ د = ٦

ح٢ن = ا + د (٢ن − ١)

= ١٠ + ٦(٢ن − ١)

= ١٠ + ١٢ن − ٦

∴ ح٢ن = ١٢ن + ٤

مثال (٣) :

في المتوالية: ٩، ٦، ٣، ... ، أوجد ترتيب الحد الذي قيمة −١٠٥ ؟

الحل :

ل = ا + د (ن − ١)

−١٠٥ = −٩ − ٣ (ن − ١)

−١٠٥ = −٩ − ٣ن + ٣

−١٠٥ = −١٢ − ٣ن

٣ن = ١٢ + ١٠٥

٣ن = ١١٧ ⇐ ١١/٧ ∴ ن = ٣٩

∴ −١٠٥ هو ح٣٩

مثال(٤):

أوجد عدد حدود المتوالية : ٦ ، ١٠، ١٤، .... ، ٩٠ ؟

الحل :

ل = ا + د (ن − ١)

٩٠ = ٦ + ٤(ن − ١)

٩٠ = ٦ + ٤ن − ٤

٩٠ = ٤ن + ٢

٨٨ = ٤ن ⇐ ن =

ن = ٨٨/٤ = ٢٢

مثال (٥) :

الحد النوني من متوالية ما يساوي دائما (٧ن + ٣) ، أوجد الثلاثة حدود الأولي ، ثم اثبت أن المتوالية عدديه .

الحل :

$ح_{ن}$ = ٧ن + ٣

$ح_{١}$ = ٧ × ١ + ٣ = ١٠

$ح_{٢}$ = ٧ × ٢ + ٣ = ١٧

$ح_{٣}$ = ٧ × ٣ + ٣ = ٢٤

∴ المتوالية هي : ١٠ ، ١٧ ، ٢٤ ، ......

$ح_{٢}$ − $ح_{١}$ = ١٧ − ١٠ = ٧

$ح_{٣}$ − $ح_{٢}$ = ٢٤ − ١٧ = ٧

∴ الفرق ثابت ∴ المتوالية عددية

أو : $ح_{ن}$ = ٧ن + ٣

$ح_{ن-١}$ = ٧ (ن − ١) + ٣ = ٧ن − ٧ + ٣ = ٧ن − ٤

$ح_{ن}$ − $ح_{ن-١}$ = ٧ن + ٣ − ٧ن + ٤ = ٧

∴ الفرق ثابت ∴ المتوالية عددية

مثال (٦) :

متوالية عددية حدها الثالث ٢ وحدها السابع ١٤ أوجد الحد الأول والفرق الثابت .

الحل :

$ح_{٣}$ = ٢ ، $ح_{٧}$ = ١٤

∴ أ + ٢د = ٢ ← (١)

∴ أ + ٦د = ١٤ ← (٢) بحل المعادلتين (١) ، (٢) آنياً :

−٤د = −٢

د = $\frac{-١٢}{-٤}$ = ٣

المعادلة (١) : أ + ٢×٣ = ٢

∴ أ = −٤

مثال(٧):

متوالية حسابية مجموع حديها الخامس والسادس ٢٠ وحدها الثامن ثلاثة أمثال حدها الثالث ، أوجد المتوالية ؟ .

الحل:

ح٥ + ح٦ = ٢٠   ∴ أ + ٤د + أ + ٥د = ٢٠

٢أ + ٩د = ٢٠   ← (١)

ح٨ = ٣ × ح٣   أ + ٧ د = ٣ (أ + ٢د)

٢أ − د = صفر   ←(٢)

بحل المعادلتين آنيا :

١٠د = ٢٠   ∴ د = ٢   بالتعويض في (١) :

٢أ + ١٨ = ٢٠   ،   ٢أ = + ٢   ∴ أ = ١

∴ المتوالية هي : ١ ، ٣ ، ٥ ، ......

مثال (٨):

في المتوالية : ٩٧، ٩٣ ، ٨٩ ، ..... ، أوجد رتبة أول حد سالب ؟

الحل:

نفرض أن ل = صفر (حداً في هذه المتوالية)

ل = أ + د (ن − ١)

صفر = ٩٧ − ٤(ن − ١)

صفر = ٩٧ − ٤ن + ٤

٤ن = ١٠١   ∴ ن = ١٠١ / ٢ = ٢٥ ١/٤

لصفر ليس من حدود المتوالية ، وأول حد سالب هو ح٢٦

تمرين (١-١):

١) في المتوالية : **٣**، **٥** ، **٧**، ..... ، أوجد الحد الرابع عشر والحد النوني ؟

٢) متوالية عددية حدها الثالث = **٩** ، والحد التاسع لها = ٣٣ أوجد المتوالية ؟

٣) أوجد رتبة أول حد سالب في المتوالية **٢٥**، **٢٢**، **١٩** ، ..... ؟

٤) أ وجد عدد حدود المتوالية ٧ ، **٤** ، **١** ..... ، **–٢٩**؟

٥) الحد النوني من متوالية عددية هو (**٣ ن + ١**) أ وجد المتوالية ؟

٦) في المتوالية ٨ ، **٣**، **–٢**، .....، أ وجد ترتيب الحد الذي قيمة (**–٣٧**)؟

مجموع المتوالية العددية:

○ **الصورة العامة :**

$$ح_ن = ٲ + ٲ + د + ٲ + ٢د + ... + ل - ٣د + ل - د + ل \leftarrow (١)$$

$$ح_ن = ل + ل - د + ل - ٢د + ... + ٲ + ٢د + ٲ + د + ٲ \leftarrow (٢)$$

بجمع (١) و (٢) :

$$٢ح_ن = ن (ٲ + ل)$$

$$\therefore ح_ن = \frac{ن}{٢} \left[ٲ + ل \right] \leftarrow (١)$$

يستعمل إذا علم الحد الأول والحد الأخير وعدد الحدود .

$$\therefore ل = ٲ + د (ن - ١)$$

$$\therefore ح_ن = \frac{ن}{٢} \left[ٲ + \underbrace{ٲ + د (ن - ١)}_{ل} \right]$$

$$\therefore ح_ن = \frac{ن}{٢} \left[٢ٲ + د (ن - ١) \right] \longleftarrow (٢)$$

يستعمل إ ذا علت المتوالية وعدد الحدود .

__مثال (١) :__

أوجد مجموع الحدود العشرين الأولى للمتوالية العددية التي حدها الأول ٣ ، وحدها العشرون ٥٧ و ٣ ؟

__الحل :__

$$ٲ = ٣ \quad ، \quad ل = ٣,٥٧ \quad ، \quad ن = ٢٠ \; ، \; ح_ن = \frac{ن}{٢} (ٲ + ل)$$

$$ح_{٢٠} = \frac{٢٠}{٢} (٣ + ٣,٥٧)$$

$$= ١٠ \times ٦,٥٧ \qquad \boxed{= ٦٥,٧}$$

مثال (٢) :

في المتوالية العددية : ٣، ٧ ، ١١ ..... أوجد مجموع :

أ) أول ١٤ حداً ؟ ب) أول ن حداً ؟

الحل :

أ): $ح_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[٢أ + د\,(ن - ١)\right]$

$ح_{ن} = \frac{١٤}{٢}\left[٢ \times ٣ + ٤(١٤ - ١)\right]$

$= ٧(٦ + ٥٢) = ٧ \times ٥٨ = \underline{\underline{٤٠٦}}$

ب): $ح_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[٢ \times ٣ + ٤(ن - ١)\right]$

$= \frac{ن}{٢}(٦ + ٤ن - ٤) = \frac{ن}{٢}(٤ن + ٢)$

$\boxed{\therefore\ ح_{ن} = ٢ن^{٢} + ن}$

مثال (٣) :

أوجد قيمة : ٢ + ٥ ، + ٨ ..... + ١١٣ ؟

الحل :

$ل = أ + د\,(ن - ١)$

$١١٣ = ٢ + ٣(ن - ١)$

$١١٣ = ٢ + ٣ن - ٣$

$١١٤ = ٣ن \qquad \therefore\ ن = \frac{١١٤}{٣} = ٣٨$ حداً

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[أ + ل\right] = \frac{٣٨}{٢}(٢ + ١١٣) = ١٩ \times ١١٥ \boxed{= ٢١٨٥}$

مثال(٤) :

متوالية عددية حدها الأول ٢٤ وحدها الأخير −٩ ومجموعها ٩٠، أوجد أساسها.

الحل :

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[أ + ل\right] \qquad ٩٠ = \frac{ن}{٢}(٢٤ - ٩)$

$= \frac{ن}{٢} \times ٩٠ = ١٥ \qquad \therefore\ ن = ٩٠ \times \frac{٢}{١٥} = ١٢$

$ل = أ + د(ن - ١)$ ، $-٩ = ٢٤ + د\,(١٢ - ١)$

$-٩ = ٢٤ + ١١د$ ، $١١د = -٣٣$ $\boxed{\therefore\ د = \frac{-٣٣}{١١} = -٣}$

<u>مثال (٥) :</u>

كم حداً تؤخذ من المتوالية العددية ١٦، ١٤ ، ١٢ ، . . . . ابتداءً من الحد الأول ليكون مجموعهما ٦٠ ؟ ثم فسر معنى وجود إجابتين ؟

<u>الحل :</u>

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + \text{د}\,(\text{ن} - ١)\right]$$

$$٦٠ = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢ \times ١٦ - ٢(\text{ن} - ١)\right]$$

$$٦٠ = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٣٢ - ٢\text{ن} + ٢\right] \quad ، \quad ٦٠ = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٣٤ - ٢\text{ن}\right]$$

$$٦٠ = ١٧\text{ن} - \text{ن}^{٢} \qquad = \text{ن}^{٢} - ١٧\text{ن} + ٦٠ = \text{صفر}$$

$$= (\text{ن} - ٥)\,(\text{ن} - ١٢) = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ن} = ٥ \quad ، \quad ١٢ \text{ حداً}$$

التفسير هو : $\text{ح}_{٦} + \ldots\ldots + \text{ح}_{١٢} = \text{صفراً}$

<u>مثال(٦) :</u>

إذا كان مجموع ن حداً من المتوالية يساوى ($\text{ن}^{٢} + ٢\text{ن}$) أوجد المتوالية والحد النوني؟

<u>الحل :</u>

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{ن}^{٢} + ٢\text{ن}$$

$$\text{ح}_{١} = ١ + ٢ \times ١ = ٣ = \text{ح}_{١}$$

$$\text{ح}_{٢} = ٤ + ٢ \times ٢ = ٨ = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢} \Leftarrow \text{ح}_{٢} = ٨ - \text{ح}_{١} = ٨ - ٣ = ٤.$$

$$\text{ح}_{٢} = ٩ + ٢ \times ٣ = ١٥ = \text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢} + \text{ح}_{٣} \Leftarrow \text{ح}_{٣} = ١٤ - (\text{ح}_{١} + \text{ح}_{٢})$$

$$= ١٥ - ٨ = ٧$$

$\therefore$ المتوالية هي : ٣ ، ٥ ، ٧ ، . . . . .

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{أ} + \text{د}\,(\text{ن} - ١) \quad ، \quad = ٣ + ٢(\text{ن} - ١)$$

$$= ٣ + ٢\text{ن} - ٢ \qquad \boxed{\therefore \ \text{ح}_{\text{ن}} = ٢\text{ن} + ١}$$

<u>مثال (٧) :</u>

متوالية عددية حدها الثالث ٨ ومجموع العشـرة حـدود الأولى منهـا ($١٤٢\frac{١}{٢}$)، أوجد المتوالية .

<u>الحل :</u>

ح$_{٣}$ = ٨ ∴ أ + ٢د = ٨ ← (١)

ح$_{١٠}$ = $١٤٢\frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١٠}{٢}$[٢أ + د (١٠ − ١)] = $١٤٢\frac{١}{٢}$ ، **(بقسمة الطرفين ÷ ٥)**

$\frac{١}{٥}$ × ٥(٢أ + ٩د) = $\frac{٢٨٥}{٢}$ × $\frac{١}{٥}$ ⇐ (٢أ + ٩د) = $\frac{٥٧}{٢}$ ، **(بطرب الطرفين ×٢)**

٢ × (٢أ + ٩د) = $\frac{٥٧}{٢}$ × ٢

∴ ٤أ + ١٨د = ٥٧ ← (٢)

بحل (١) ، (٢) آنياً :

(١) × ٤ : ٤أ + ٨د = ٣٢

(٢) × ١ : ٤أ + ١٨د = ٥٧

بالطرح : − ١٠د = − ٢٥

∴ د = $\frac{-٢٥}{-١٠}$ = $\frac{٥}{٢}$ = $٢\frac{١}{٢}$

بالتعويض في (١) :

أ + ٢ × $\frac{٥}{٢}$ = ٨ ∴ أ = ٣

∴ **المتوالية هي : ٣ ، $٥\frac{١}{٢}$ ، ٨ ، ......**

<u>مثال (٨) :</u>

أوجد خمسة أعداد في توالى عددي مجموعها **٦٥** ، وحدهما الأخير **٢٣**؟

<u>الحل :</u>

ح$_{ن}$ = $\frac{ن}{٢}$[أ + ل]

٦٥ = $\frac{٥}{٢}$ = (أ + ٢٣) ، ٢٦= أ + ٢٣ ∴ أ = ٣

ل = أ + د (ن − ١)

$٢٣ = ٣ + د\,(٥ - ١)$

$٢٣ = ٣ + ٤د$

$٢٠ = ٤د$ $\therefore$ $\underline{\underline{د = ٥}}$

$\therefore$ الأعداد هي : ٣ ، ٨ ، ١٣ ، ١٨ ، ٢٣ ، .....

مثال (٩):

من الأعداد الصحيحة المحصور ة بين ١٠٠ ، ٥٠٠ ، أ وجد :

أ) مجموع الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ ؟

ب) مجموع الأعداد التي لا تقبل القسمة على ٣ ؟

الحل :

أ) الأعداد التي تقبل القسمة على ٣ بين ١٠٠ ، ٥٠٠ هي :

١٠٢ ، ١٠٥ ، ١٠٨ ، . . . . . ، ٤٩٨

$ل = ٲ + د\,(ن - ١)$

$٤٩٨ = ١٠٢ + ٣\,(ن - ١)$

$٤٩٨ = ١٠٢ + ٣ن - ٣$

$٤٩٨ = ٣ن + ٩٩$

$٣ن = ٣٩٩$ $\therefore$ $ن = ١٣٣$

$ح_{ن} = \frac{ن}{٢}\left[ٲ + ل\right]$

$ح_{١٣٣} = \frac{١١٣}{٢}\,(١٠٢ + ٤٩٨) = \frac{١١٣}{٢} \times ٦٠٠$

$= ١٣٣ \times ٣٠٠ = ٣٩٩٠٠$

$\therefore$ مجموع ألا عداد الصحيحة المحصورة بين ١٠٠ ، ٥٠٠

وتقبل القسمة على ٣ = ٣٩٩٠٠

ب) الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠٠ ، ٥٠٠ هي :

١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، . . . . ، ٤٩٩ ؟

$ل = ٲ + د\,(ن - ١)$ $\therefore$ $ن = ٤٩٩$

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[\text{أ} + \text{ل}\right]$$

$$\therefore \text{ح}_{\text{ن}} = \frac{٣٩٩}{٢}\left[١٠١ + ٤٩٩\right]$$

$$= \frac{٣٩٩}{٢} \times ٦٠٠$$

$$= ٤٩٩ \times ٣٠٠ = ١١٩٧٠٠$$

∴ مجموع الأعداد الصحيحة المحصورة بين ١٠٠، ٥٠٠

$$\boxed{\text{ولا تقبل القسمة على ٣} = ١١٩٧٠٠ - ٤٩٩٠٠ = ٧٩٨٠٠}$$

<u>مثال (١٠) :</u>

أوجد مجموع الحدود الموجبة من المتوالية : **٣٣ ، ٢٩، ٢٥**، . . . . ؟

<u>الحل :</u>

نفرض أن : ل = صفر

$$\text{ل} = \text{أ} + \text{د}\,(\text{ن} - ١)$$

$$\text{صفر} = ٣٣ - ٤(\text{ن} - ١)$$

$$\text{صفر} = ٣٣ - ٤\text{ن} + ٤$$

$$٤\text{ن} = ٣٧ \qquad \therefore \text{ن} = \frac{٢}{٧} = ٩\frac{١}{٤}$$

∴ ن كسر ∴ الصفر ليس من حدود المتوالية .

∴ عدد الحدود الموجبة = ٩

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{٢}\left[٢\text{أ} + \text{د}\,(\text{ن} - ١)\right]$$

$$\text{ح}_{٩} = \frac{٩}{٢}\left[٢ \times ٣٣ - ٤(٩ - ١)\right]$$

$$= \frac{٩}{٢}(٦٦ - ٤ \times ٨) = \frac{٩}{٢}(٦٦ - ٣٢)$$

$$= \frac{٩}{٢} \times ٣٤ = ٩ \times ١٧ = \underline{\underline{١٥٣}}$$

<u>تمرين ١–٢:</u>

١. الحد الرابع من متوالية عددية **١٤** والحد التاسع **٣٤** أوجد مجموع العشرين حداً الأولى منها؟

٢. الحد النوني في متوالية عددية (٢ن + ٣) أوجد مجموع الثلاثين حداً الأولى منها ؟

٣. الحد الثامن من متوالية عددية ضعف الثالث ومجموع الثمانية حدود الأولى يساوى **٣٩**، وجد المتوالية ومجموعها النوني ؟

٤. إذ أ كان مجموع ن حداً من متوالية ما هو (٢ن^{٢} + ن) أكتب المتوالية وحدها النوني؟

٥. في متوالية حسابية مجموع ن حداً يعطى بالعلاقة ح$_{ن}$ = ٢١ن − ن^{٢} ، أوجد كم حداً ابتداءً من الأول تؤخذ منها ليكون المجموع (−٧٢) ؟

٦. إذا مجموع كل من المتواليتين إلى ن من الحدود يساوى الأخر أوجد ن:

أ- ٢٣، ٢٥، ٢٧، . . . . .

ب- ١ ، ٤ ، ٧ ،

٧. في المتوالية العددية ٤ ، ٦ ، ٨ ، .... مجموع (ن + ٢) حداً منها ابتداءً من الأول يزيد على مجموع ن حداً منها إ ابتداءً من الأول بمقدار **٥٠** أوجد قيمة ن .

١-٣-٢/ المتوالية الهندسية:

التعريف: هـى المتوالية التى يتكون أي حد من حدودها بضرب الحد السابق له في كمية ثابتة تسمى هذه الكمية الثابتة بأساس المتوالية أو النسبة الثابتة.

فمثلاً : ٣ ، ٦ ، ١٢ ، متوالية هندسية أساسها = ٢.

$$\text{أساس المتوالية الهندسية} = \frac{\text{أى حد}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$$

ففي أي متوالية هندسية :

$$\text{الأســاس} = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢} = \ldots\ldots = \frac{ح_ن}{ح_{ن-١}} = \text{ثابت}$$

- **تكوين المتوالية الهندسية :**

يمكـن كتابـة المتواليـة الهندسـية إذا علـم حـدها الأول وأساسـها وذلـك بكتابـة الحد الأول ثـم ضـرب الحد الأول في الأسـاس للحصـول علـى الحد الثـاني ثـم ضـرب الحـد الثـاني في الأسـاس للحصـول علـى الحـد الثالـث . . ، وهـكذا . فمثلاً المتوالية الهندسية التي حدها الأول ٣ وأساسها $\sqrt{٢}$ ∴ هي : ٣ ، $٣\sqrt{٢}$، ٦ ، . . .

- **الصورة العامة للمتوالية الهندسية:**

نرمز للحد الأول بالرمز ($أ$) و للأسـاس بـالرمز ($ر$) وعليـه تصبح الصـورة العامة كـالآتي: $أ$ ، $أر$ ، $أر^٢$ ، . . . . . ، $ل$.

- **استنتاج الحد العام :**

$$ح_١ = أر^{١-١} = أ$$

$$ح_٢ = أر^{٢-١} = أر$$

$$ح_٣ = أر^{٣-١} = أر^٢$$

$$ح_{١٠} = أر^٩ \quad ، \quad ح_{١٥} = أر^{١٤}$$

$$\boxed{ح_ن = أر^{ن-١} = ل}$$

وهذا يسمى بالحد العام في المتوالية الهندسية .

مثال (١) :

إذا كانت : س ، س + ١ ، ٣ س + ١ تكون متوالية هندسية ، فأوجد قيمتي س ؟

الحل :

$$\text{الأساس} = \frac{ح_٢}{ح_١} = \frac{ح_٣}{ح_٢}$$

$$\frac{س + ١}{س} = \frac{٣ س + ١}{س + ١}$$

$$(س + ١)^٢ = س (٣ س + ١)$$

$$س^٢ + ٢ س + ١ = ٣ س^٢ + س$$

$$٢س^٢ - س - ١ = صفر$$

$$(٢س + ١) (س - ١) = صفر$$

$$\boxed{\therefore \ س = -\frac{١}{٢} ، ١}$$

مثال (٢) :

أوجد الحد التاسع في المتوالية : ٤٨ ، ٢٤ ، ١٢ ، ...... ؟

الحل :

$$ح_٩ = أ ر^٨$$

$$= ٤٨ \times (\tfrac{١}{٢})^٨ = ٤٨ \times \tfrac{١}{٢٥٦} ، \quad \boxed{\therefore \ ح_٩ = \frac{٣}{١٦}}$$

مثال (٣) :

أ كتب الأربعة حدود الأولى من المتوالية الهندسية التي أساسها يساوى ٢ ، وحدها الثامن يساوى ٨٩٦ ؟

الحل :

$ر = ٢ \quad \leftarrow \quad (١)$

$ح_٨ = ٨٩٦ \quad \leftarrow \quad (٢)$

$أ ر^٧ = ٨٩٦$ بالتعويض (١) في (٢) :

$أ(٢)^٧ = ٨٩٦$

$م \times ١٢٨ = ٨٩٦$

$\therefore \quad م = \frac{٨٩٦}{١٢٨} = ٧$

∴ المتوالية هي : ٧ ، ١٤ ، ٢٨ ، ٥٦ ، ....

مثال (٤) :

في المتوالية: **٨١ ، ٥٤ ، ٣٦** ، ..... أوجد ترتيب الحد الذي قيمته $٧\frac{١}{٩}$ ؟

الحل :

$ل = ٧\frac{١}{٩}$ ، $م = ٨١$

$ر = \frac{٥٤}{٨١}$ ، $= \frac{٢}{٣}$

$ل = م ر^{ن-١}$

$\frac{٦٤}{٩} = ٨١ \left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن-١}$

$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن-١} = \frac{٦٤}{٩} \times \frac{١}{٨١}$

$\left(\frac{٢}{٣}\right)^{ن-١} = \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٦} \Leftarrow ن-١ = ٦ \therefore ن = ٧$

$\therefore \quad ٧\frac{١}{٩}$ هو $ح_٧$

مثال (٥) :

أ وجد المتوالية التي حدها النوني يساوي $٢(-٣)^{ن+١}$

$ح_١ = ٢(-٣)^٢ = ٢ \times ٩ = ١٨$

$ح_٢ = ٢(-٣)^٣ = ٢ \times -٢٧ = -٥٤$

$ح_٣ = ٢(-٣)^٤ = ٢ \times ٨١ = ١٦٢$

المتوالية هي : ١٨ ، -٥٤ ، ١٦٢ ، .....

مثال(٦):

متوالية هندسية حدها الثالث يساوى **١٢** وحدها السادس يساوي **٩٦** ، أوجد المتوالية ؟

الحل :

$ح_٣ = ١٢$

$م ر^٢ = ١٢ \quad \leftarrow (١)$

$\text{ح}_{٦} = ٩٦$

$\text{٩}\,\text{ر}^{٥} = ٩٦ \quad \leftarrow (٢)$

بقسمة (١) ، (٢) :

$$\frac{\text{٩}\,\text{ر}^{٥}}{\text{٩}\,\text{ر}^{٢}} = \frac{٩٦}{١٢}$$

$\text{ر}^{٣} = ٨ \quad \therefore \text{ر}^{٣} = ٢^{٣} \quad \therefore \text{ر} = ٢$

بالتعويض في (١) :

$\text{٩} \times ٤ = ١٢ \quad \therefore \text{٩} = ٣$

$\boxed{\therefore \text{ المتوالية هي : } ٣ \text{ ، } ٦ \text{ ، } ١٢ \text{ ، } . . . .}$

<u>مثال (٧) :</u>

متوالية هندسية حدها الرابع ٣٨٤ وحدها الثامن ٢٤ أوجد المتوالية ؟

<u>الحل :</u>

$\text{ح}_{٤} = ٣٨٤$

$\text{٩}\,\text{ر}^{٣} = ٣٨٤ \quad \leftarrow (١)$

$\text{ح}_{٨} = ٢٤$

$\text{٩}\,\text{ر}^{٧} = ٢٤ \quad \leftarrow (٢)$

بقسمة (٢) ÷ (١) :

$$\frac{\text{٩}\,\text{ر}^{٧}}{\text{٩}\,\text{ر}^{٥}} = \frac{٢٤}{٣٨٥}$$

$\therefore \text{ر}^{٤} = \frac{١}{١٦} \text{ ، } \text{ر}^{٤} = (\frac{١}{٢})^{٤}$

$\therefore \text{ر} = \frac{١}{٢}$

بالتعويض في (٢) :

$\text{٩}(\frac{١}{٢})^{٧} = ٢٤ \qquad \text{٩} \times \frac{١}{١٢٨} = ٢٤$

$\therefore \text{٩} = ٢٤ \times ١٢٨ = ٣٠٧٢$

$\boxed{\therefore \text{ المتوالية هي : } ٣٠٧٢ \text{ ، } ١٥٣٦ \text{ ، } ٧٦٨ \text{ ، } .....}$

<u>تمرين (٣.١):</u>

١. أوجد الحد الثامن والحد النوني للمتوالية ١ ، ٢ ، ٤ ، . . . . . . ؟

٢. أوجد المتوالية الهندسية التي حدها الثالث ١٨ وحدها السادس ٤٨٦ ؟

٣. أ وجد المتوالية الهندسية التي مجموع حدها الثالث والرابع = ٦٠ ومجموع حديها السادس والسابع = ٤٨٠ ؟

٤. في المتوالية الهندسية ٢٧ ، ٩ ، ٣ ،.... ، أوجد رتبة الحد الذي قيمته $\frac{١}{٧٢٩}$.

٥. أ وجد المتوالية الهندسية التي حدها النوني $٢ \times ٣^{ن-١}$ ؟

٦. إ ذ ا كان س ، س +١ ، ٣ س +١ ، هي ثلاثة حدود متتالية أوجد قيم س التي تجعل هذه المتوالية : (i) عددية (ii) هندسية ؟

٧. إ ذ ا كان (س ، ص ، ٨) في توالي عددي ، (س ، ص ، ٩) في توالي هندسي ؟ أوجد قيم (س ، ص) ؟

١-٤/ المـــتباينات

تعريفها :

> **التباين:** يعنى الاختلاف إذ ا كان لدينا العدديين الحقيقيين **س** ، **ص** مثلاً فإنهما يحققان واحدة من العلاقات الآتية :

إما : **س** تساوي **ص** .

أو : **س** أكبر من **ص** .

أو : **س** أصغر من **ص** .

فالعلاقة الأولي تسمي متساوية والعلاقتان الثانية والثالثة تسمي متباينة .

أنواع المتباينات ثلاثة:

١/ المتباينات الجبرية ٢/ المتباينات الحرفية ٣/ المتباينات الخطية

رموز المتباينات :

١/ الرمز $<$ (أصغر من) ∴ الرمز $\geq$ (أصغر من أو يساوي) .

٢/ الرمز $>$ (أكبر من) ∴ الرمز $\leq$ (أكبر من أو يساوي) .

٣/ الرمز $\not>$ (ليس أصغر من و معناه $\leq$) .

٤/ الرمز $\not<$ (ليس أكبر من ومعناه $\geq$) .

٥/ الرمز $\not\geq$ (ليس أصغر من ولا يساوى ($<$)) .

٦/ الرمز $\not\leq$ (ليس اكبر من ولا يساوى ومعناه ($>$)) .

> **ملحوظة** :
>
> ١/ إي عدد موجب أكبر من صف،ر ولذلك تكتب **أ** $>$ صفر دلالة على إن **أ** كميه موجبة .
>
> ٢/ إي عدد سالب أصغر من ولذلك تكتب **ب** $<$ صفر دلالة على أن **ب** كمية سالبة .

خواص المتباينات :

١/ إذا كانت **س > ص** فإن: (س– ص) > **صفر** (+) ، (ص– س) < **صفر** (–)

٢/ إذا كانت **س > ص** فإن: **ص < س** (هي واحد) .

٣/ إذا كانت **س > ص** ، أ (عدد حقيقي) فإن: **س ± أ >** ، **ص ± أ** .

٤/ إذا كانت **س > ص** ، أ > **صفر** (+) فإن : **أ س / أ > أ ص / أ** ، **س > ص** .

٥/ إذا كانت **س > ص** ، **أ < صفر** (–) فان: **أ س / أ < أ ص / أ** ، **س < ص** .

ينعكس رمز المتباينة إذا ضربنا أو قسمنا علي كمية سالبة .

إذا كان **س < ص** ، **ص < ع** فإن : **س < ع**

حل المتباينات وتمثيلها هندسيا :

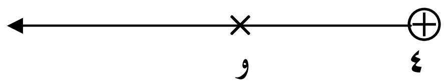
مثال (١) : حل المتباينة **٢س – ٣ < ٥** ومثل الحل هندسيا ؟

الحل :

٢س – ٣ < ٥

٢س < ٨ (بإضافة **٣** للطرفين)

س < ٤ (بالقسمة ٢)

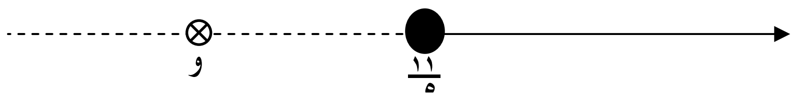


مثال (٢) : حل المتباينة : **٥س + ١ ≤ ٤ × ٣**

الحـل :

٥ س + ١ ≤ ١٢

٥س / ٥ ≤ ١١ ، **س ≤ ١١**

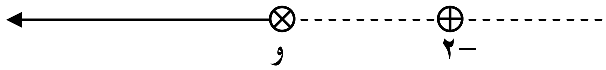


مثال (٣): حل المتباينة : **٤ س – س > ١٠ – ٢س** ، ومثل الحل هندسيا ؟

الحـل :

− ٥س + ٢س > ١٠ − ٤

− ٣ س > ٦ ، س > −٢

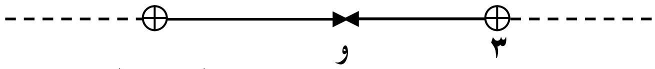


مثال (٤) : حل المتباينة ١ > ٢ س + ١ > ٤ ، ثم مثل الحل هندسيا :

الحـل :

بطرح (١) من كل الأطراف : ٠ > ٢س > ٦

بالقسمة علي (٢) : ٠ > س > ٣



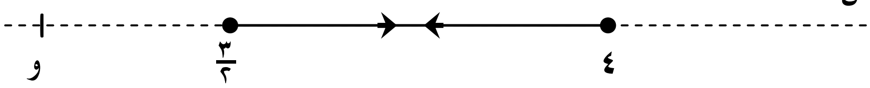
مثال (٥) : أوجد مجموعة حل المتباينة المزدوجة : ٠ ≤ $\frac{\text{٣ س − ٢س}}{\text{٥}}$ ≤ −١

الحـل :

≤ ٣س − ٢س ≤ − ٥

−٣ ≤ −٢س ≤ − ٨

$\frac{٣}{٢}$ ≤ س ≤ ٤



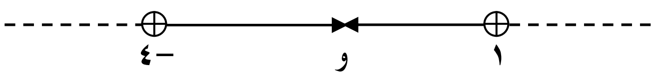
∴ مجموعة الحل = {س : $\frac{٣}{٢}$ ≤ س ≤ ٤}

مثال (٦) : حل المتباينة ومثل الحل هندسيا : ٣ + ٢ س ≤ ٥ ≤ ٣ س + ١٧

الحـل :

٣س + ٢س ≤ ٥	٣س + ١٧ ≤ ٥
٢س ≤ ٢	٣س ≤ −١٢
س ≤ ١	س ≤ −٤

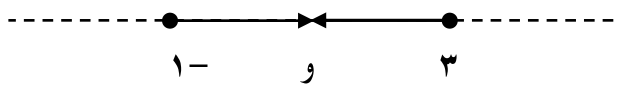
− ٤ ≤ س ≤ ١



مثال (٧) : ٥ س + ٢ ≥ ٣ س + ٨ ≥ ٤ س + ٩

الحل :

٥ س + ٢ ≥ ٣س + ٨	٤ س + ٩ ≤ ٣ س + ٨
٥ س − ٣س ≥ ٨ − ٢	٤ س − ٣ س ≤ ٨−٩
٢ س ≥ ٣	س ≤ −١
س ≥ ٣	



تمرين (١-٤) :

١. أوجد قيم س التي تحقق المتباينة **٥ > س+ ٣ > ١٠** ، ثم مثلها هندسيا ؟

٢. حل المتباينة **٥ ≤ ٣ -٢ س ≤ −٧** ، ومثلها هندسيا ؟

٣. حل المتباينة **| ٤ س− ٧ | ≥ ٣** ، ومثلها هندسيا ؟

٤. حل المتباينة **−٣ ≥ $\frac{٣س-٣}{٥}$ ≥ ٥** ، ثم ضع الحل في صورة القيمة المطلقة ؟

٥. أوجد قيم س التي تحقق المتباينتين **٥ − ٣س ≥ ١٧** ، **٥س− ٣ ≥ ٧** ، ومثلها هندسيا ثم أكتب الحل في صورة القيمة المطلقة ؟

إجابات تمارين الوحدة الأولى :

تمرين(١− ١):

(١) $ح_{١٤}$ = ٢٩ ، $ح_{ن}$ = ٢ن + ١ ، (٢) ١ ، ٥ ، ٩ ، ..... (٣) $ح_{١٠}$ ، (٤) عدد الحدود = ١٣ حداً

(٥) ٤ ، ٧ ، ١٠ ، .... (٦) $ح_{١٠}$ (٧) ٧ ، ١١ ، ١٥ ، ١٩ ، ٢٣ (٨) ٣، ٥ ، ٧ أو ٧، ٥، ٣

تمرين(١− ٢):

(١) ٨٠٠ (٢) ١٠٢٠ (٣) $\frac{٩}{٤}$، ٣ ، $٣\frac{٣}{٤}$ ، $ح_{ن}$ = $\frac{٣}{٤}$(٢+ن)

(٤) ٣ ، ٧ ، ١١ ، ..... ، $ح_{ن}$ = ٤ن −١ (٥) ٢٤ حداً (٦) ن = ٤٥ (٧) ن = ١٠

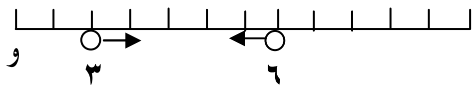
تمرين (١− ٣):

(١) ١٢٨ ، حن = ن −١ (٢) ٢ ، ٦ ، ١٨ ، .... (٣) ٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ... (٤) ن = ١٠ (٥) ٢ ، ٦ ، ١٨ ، .... ، (٦) ٤√٢ ، ٨ ، ٨√٢ ، أو −٤√٢ ، ٨ ، −٨√٢، (٧) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) −$\frac{1}{2}$ ، ١

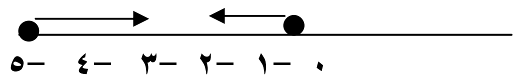
(٨) (٤ ، ٦) ، (١٦، ١٢) (٩) ٢ ، ٤ ، ٨ ، أو ٨ ، ٤ ، ٢ ، ٨ ، ٢ ، $\frac{1}{2}$.

تمرين (١− ٤):

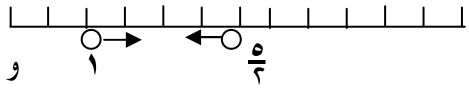
(١) ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ٢ < س < ٧ ،



(٢) −١ ≥ س ≥ −٥

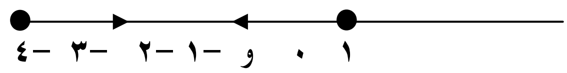


(٣) −١ ≥ س ≥ $\frac{5}{2}$



(٤) −٦ ≥ س ≥ ١٤ ، |س −٤| ≥ ١٠

(٥) −٤ ≥ س ≥ ٢ ، |س+١| ≥ ٣ ،



الوحدة الثانية

الهندسة التحليلية

الرياضيات الأولية

الوحدة الثالثة

الإحصــــــاء

التعريف :

علم الإحصاء : هو ذلك الفرع من العلوم الذى يهتم بجمع البيانات وتصنيفها وعرضها وتحليلها وتفسيرها بغرض المقارنة ومعرفة النتائج واستنتاج العلاقات لاستخدامها في اتخاذ القرارات المناسبة .

تكوين الجدول التكراري :

مثال :

فيما يلي الدرجات التي أحرزها فصل به عشرون طالبا في امتحان حيث الدرجة الكاملة تساوي **٦٠** درجة المطلوب عمل الجدول التكراري والدرجات هي : **١٥ ، ٢٩ ، ٣٦ ، ٢٢ ، ٣٣ ، ٣٩، ٣٤ ، ٢٧ ، ٢٩ ، ٤٥ ، ٣٦ ، ٢٥ ، ٤١ ، ٣٨ ، ٥٥ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ١٩ ، ٥٠ ، ٤٤ .**

خطوات الحل :

١/ مدي الدرجات = أكبر مفردة – أصغر مفردة = **٥٥ – ١٥ = ٤٠**

٢/ الطول المقترح للفئة = **١٠**

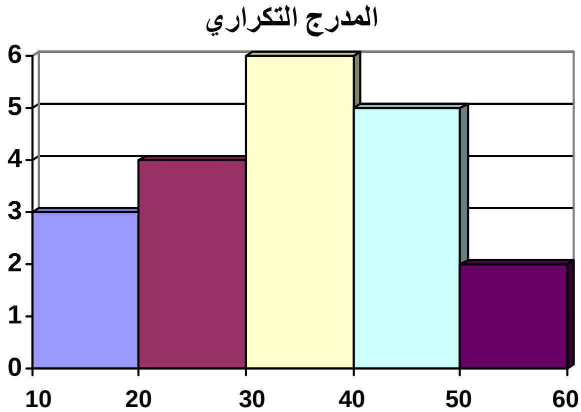
٣/ عدد الفئات = $\frac{\text{مدي الدرجات}}{\text{الطول المقترح}}$ = $\frac{٤٠}{١٠}$ = **٤**

٤/ جدول التفريغ :

الفئات (فترة الدرجات)	العلاقات	التكرار
صفر ــــــــ	٠	صفر
١٠ ــــــــ	١١	٢
٢٠ ــــــــ	~~١١١١~~ حزمة	٥
٣٠ ــــــــ	~~١١١١~~١	٦
٤٠ ــــــــ	١١١١	٤
٥٠ ــــــــ ٦٠	١١١	٣
المجمــــــــوع		٢٠

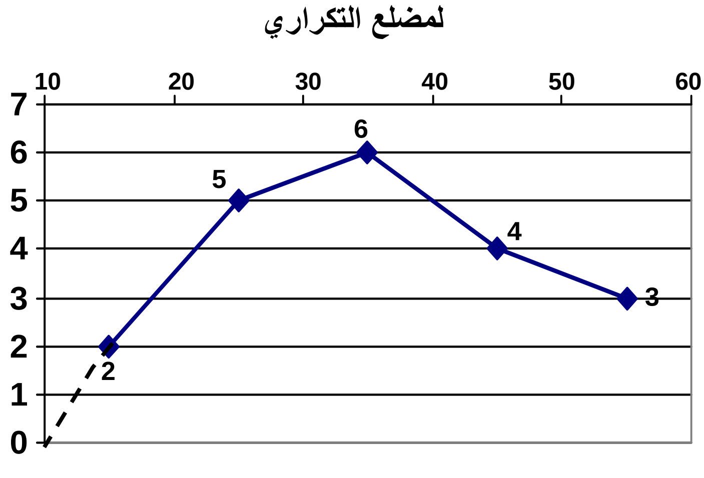
المدرج التكراري :

هو مجموعة من المستطيلات المتلاصقة بحيث تكون قاعدة كل منهما طول الفئة ، وارتفاعها تكرار الفئة .



المضلع التكراري :

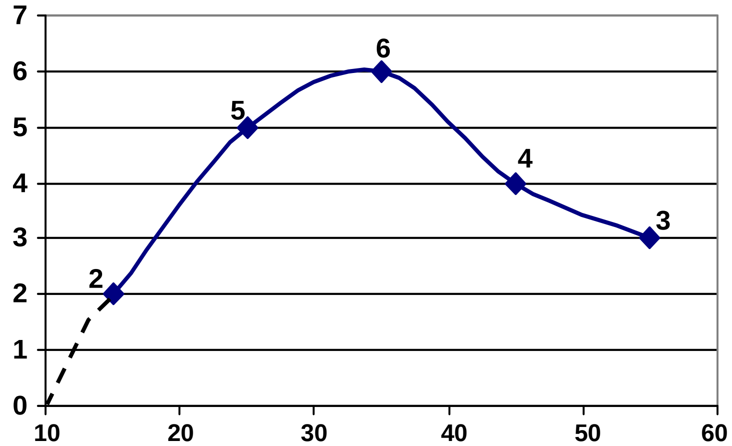
هو الشكل الناتج عن مجموع الخطوط التى تربط بين النقط التى إحداثياتها مراكز الفئات والتكرارات المناظرة . أو هو الخط المتكسر الذى يمر بالمنتصفات العليا للمستطيلات التي يتكون منها المدرج التكراري .



المنحني التكراري :

هو منحنى ممهد باليد يمر بأكبر عدد من النقط التى إحداثياتها مراكز الفئات و التكرارات المناظرة .

لمنحنى التكراري



مقاييس النزعة المركزية :

من خصائص البيانات أن لها نزعة أو ميلا لأن تتركز حول قيمة معينة متوسطة وهذه القيمة التي تتركز حولها البيانات تسمي بالمتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية

ومن أهم مقاييس النزعة المركزية :

١/ الوسط الحسابي ٢/ الوسيط ٣/ المنوال

الوسط الحسابي :

يعرف الوسط الحسابى لمجموعة من القيم بأنة القيمة التى لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة ، لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساويا لمجموع القيم الأصلية وبالتالى فإنه يساوى مجموع القيم على عددها ويرمز له بالرمز $\bar{س}$.

إيجاد الوسط الحسابي من البيانات غير المبوبة القانون:

$$\bar{س} = \frac{\text{مج س}}{ن}$$

مثال:

إذا كانت أعمار أربعة أشخاص هي : ٨ ، ١٢ ، ٩ ، ١١ سنة أحسب الوسط الحسابي لأعمار هؤلاء الأشخاص .

الحل :

$$\text{مج س} = \frac{\text{س}}{\text{ن}} = \frac{٨ + ١٢ + ٩ + ١١}{\text{ن}} = \frac{٤٠}{٤} = ١٠ \text{ سنوات .}$$

مثال :

بين الجدول التالي أرباح إحدى الشركات بملايين الدينارات في الفترة ٨٦ -٩٢ :

العام	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢
الربح	١,٤	٢,٣	٠,٩	١,٢	١,٥	٣,٦	٠,٧

أحسب الوسط الحسابي للأرباح .

الحل :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع الأرباح}}{\text{عددهم}} = \frac{١٢,٤}{٧} = ١,٢ = ١,٦ \text{ مليون دينار}$$

إيجاد الوسط الحسابي من البيانات المبوبة :

مثال : من الجدول التالي أحسب الوسط الحسابي للعمر :

س	العمر	٨	٩	١١	١٢
ك	عدد الأشخاص	٣	٥	٤	٢

الحل :

القانون :

$$\boxed{\bar{\text{س}} = \frac{\text{مج (ك × س)}}{\text{مج ك}}}$$

طـــول الفئة = مبدأ أي فئة – مبدأ الفئة التي تسبقها مباشرة

= الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى للفئة

مركز الفئة = طول الفئة + مبدأ أي فئة (مركزها س)

عدد الأشخاص (ك)	العمر	ك×س
٣	٨	٢٤
٥	٩	٤٥
٤	١١	٤٤
٢	١٢	٢٤
مج ك ١٤		مج (ك×س) ١٣٧

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مج (ك × س)}}{\text{مج ك}} = \frac{١٣٧}{١٤} = \underline{\underline{٩,٧٨٦}} \text{ سنة}$$

مثال : الجدول التكراري التالي يبين درجات **٤٠** تلميذاً في أحد الاختبارات :

الفئات	١٠—	٢٠—	٣٠—	٤٠—
التكرار	٦	١٢	١٥	٧

أحسب الوسط الحسابي .

الحل :

ف	ك	مركز الفئات س	ك × س
١٠—	٦	١٥	٩٠
٢٠—	١٢	٢٥	٣٠٠
٣٠—	١٥	٣٥	٥١٥
٤٠—	٧	٤٥	٣١٥
مج ك	٤٠	مج (ك× س)	١٢٣٠

طول الفئة = **٢٠ — ١٠ = ١٠**

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{طول الفئة}}{٢} + \text{مبدأ أي فئة} = ٥ + \text{مبدأ أي فئة}$$

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مج (ك × س)}}{\text{مج ك}} = \frac{١٢٣٠}{٤٠} = \underline{\underline{٣٠,٧٥}}$$

مثال :

الجدول التكراري الآتي يبين نتائج فصل من **٥٠** طالب في اختبار ما أوجد الوسط الحسابي:

الفئة	٠ ــ٩	١٠ــ١٩	٢٠ ــ٢٩	٣٠ ــ٣٩	٤٠ ــ٤٩	٥٠ ــ٥٩	المجموع
التكرار	٢	٨	١٥	١١	٨٠	٦	٥٠

الحل :

ف	ك	مراكز الفئات س	ك × س
٠ ــــ٩	٢	٤,٥	٩
١٠ ــــ١٩	٨	١٤,٥	٢١٦
٢٠ ــــ٢٩	١٥	٢٤,٥	٣٦٧,٥
٣٠ــــ٣٩	١١	٣٤,٥	٣٧٩,٥
٤٠ ــــ٤٩	٨	٤٤,٥	٣٥٦
٥٠ ــــ٥٩	٦	٥٤,٥	٣٢٧
مج ك	٥٠	مج (ك× س)	١٦٥٥

طول الفئة = الحد الأعلى للفئة – الحد الأدنى = ١٩ – ١٠ = ٩

مركز الفئة = $\frac{\text{طول الفئة}}{٢}$ + مبدأ أي فئة

$$\therefore \bar{س} = \frac{\text{مج (ك × س)}}{\text{مج ك}} = \frac{١٦٥٥}{٥٠} = \underline{\underline{٣٣,١}}$$

المنـوال:

> **يعـرف المنـوال لمجموعـة مـن القيـم بأنـة القيمـة الأكـثـر تكـرارا أو شيوعا بالتوزيع .**

- **إيجاد المنوال من البيانات غير المبوبة :**

مثال : أوجد المنوال للدرجات الآتية : (**٥٠ ، ٥٥ ، ٥٣ ، ٥٥ ، ٦٢ ، ٥٧ ، ٥٥ ، ٥٩**)

الحل :

المنوال = **٥٥**

- **إيجاد المنوال من البيانات المبوبة :**

مثال : أوجد المنوال من الجدول التكراري التالي :

الفئة المنوالية

الفئات	١٦ ــــ	٢٠ ــــ	٢٤ ــــ	٢٨ ــــ	٣٢ ــــ	المجموع
التكرار	**٢**	**٨**	**١٤**	**١٠**	**٦**	**٤٠**

التكرار السابق   التكرار المنوالي   التكرار اللاحق

الحل :

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{\text{ف}١}{\text{ف}١ + \text{ف}٢} \times \text{طول الفئة}$$

الفئة المنوالية هي التي تقابل أكبر تكرار = **٢٤ ــــ**

ف١ = التكرار المنوالي− التكرار السابق = **١٤ — ٨ = ٦**

ف٢ = التكرار المنوالي – التكرار اللاحق = **١٤ — ١٠ = ٤**

$\therefore$ المنوال = **٢٤** + $\frac{٦}{٦+٤}$ × **٤** = **٢٤** + $\frac{٢٤}{١٠}$ = **٢٤ + ٢,٤ = ٢٦,٤**

الوســيط :

> يعرف الوسيط لمجموعة من القيم بأنة القيمة التى تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا وبالتالى فإن عدد القيم الأصفر منة يكون مساويا لعدد القيم الكبر منة .

إيجاد الوسيط من البيانات غير المبوبة :

مثال : أحسب الوسيط للأوزان التالية لبعض الطلاب : (٥٨ ، ٥٠ ، ٦٣ ، ٥٥).

الحل :

الترتيب التصاعدي : ٥٠ ، ٥٢ ، ٥٥ ، ٥٨ ، ٦٣

ترتيب الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢}$ هذا في حالة العدد فردي $\frac{٥ + ١}{٢}$ = ٣

∴ الوســيط = $\underline{\underline{٥٥}}$ كجم

مثال :

أحسب الوسيط للأوزان التالية لبعض الطلاب: (٥٢ ، ٥٨ ، ٥٠ ، ٦٣ ، ٥٧ ، ٥٥).

الحل :

الترتيب التصاعدي : ٥٠ ، ٥٢ ، ٥٥ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٦٣

ترتيب الوسيط الأول = $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣ ∴ الوسيط الأول = ٥٥

ترتيب الوسيط الثاني = $\frac{ن + ١}{٢}$ = $\frac{٦ + ٢}{٢}$ = ٤ ∴ الوسيط الثاني = ٥٧

∴ الوسيط = ٥٥ + ٥٧ = ١١٢ = $\underline{\underline{٥٦}}$ كجم

إيجاد الوسيط من البيانات المبوبة :

مثال :

جدول التوزيع التكراري التالي يمثل درجات ٤٠ طالبا في مادة الرياضيات ، أحسب الوسيط :

الفئات	٣٠ ــ	٤٠ ــ	٥٠ ــ	٦٠ ــ	٧٠ ــ	٨٠ ــ	٩٠ ــ	المجموع
التكرار	٥	٦	١٠	٨	٦	٣	٢	٤٠

الحل:

ف	ك	التكرار المتجمع الصاعد
٣٠ ــــ	٦	٥ + ٦ = ١١
٥٠ ــــ	١٠	١١+١٠ = ٢١
٦٠ ــــ	٨	٢١ + ٨ = ٢٩
٧٠ ــــ	٦	٢٩ + ٦ = ٣٥
٨٠ ــــ	٣	٣٥ + ٣ = ٣٨
٩٠ ــــ	٢	٣٨ + ٢ = ٤٠
مج ك	٤٠	

(١) ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مج ك}}{٢}$ = $\frac{٤٠}{٢}$ = $\underline{\underline{٢٠}}$

(٢) الوسيط – مجموع التكرارات المتجمعة قبل فئة الوسيط = ٢٠ – ١١ = ٩

(٣) فئة الوسيط = ٥٠ تكرارها = ١٠

الوسيط =	مبدأ فئة الوسيط	+	$\frac{\text{طول الفئة}}{\text{تكرارها}}$	× الفرق

∴ الوسيط = ٥٠ + $\frac{١٠}{١٠}$ × ٩ = ٥٠ + ٩ = $\underline{\underline{٥٩}}$

ملاحظة : إذا كان ترتيب الوسيط هو واحد من التكرارات المتجمعة الصاعدة في هذه الحالة لا يستخدم القانون بل نحصل على قيمة الوسيط مباشرة من الجدول المتجمع الصاعد .

مزايا وعيوب المتوسطات الثلاثة :

أ/ الوسط الحسابي : (المزايا)

١) يمتاز بالسهولة والبساطة في العمليات الحسابية .

٢) تدخل جميع القيم في حسابه .

العيوب : ١) يتأثر بالقيم الشارة أو المتطرفة .

٢) لا يمكن إيجاده بيانيا (عن طريق الرسم)

ب/ الوسيط :

المزايا : ١) لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

٢) يمكن إيجاده بيانيا (برسم المنحني المتجمع الصاعد) .

العيوب : ١) لا تدخل جميع القيم في حسابه ، إذ ا أنة يعتمد علي قيمة واحدة فقط (أو قيمتين علي الأكثر) .

٢) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات تستخدم طرق تقريبية في حسابه.

ج/ المنوال :

المزايا : ١) بسيط من حيث الفكرة أو طريقة إيجاده .

٢) لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

العيوب : ١) رغم تعدد طرق حسابه إلا أنها كلها طرق تقريبية لا سيما في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات .

٢) في بعض الحالات - وحسب التعريف - لا يمكن إيجاده . أي لا يكون هنالك منوال للقيم (إذ ا لم تكون هنالك قيمة متكررة أكثر من غيرها) وفي بعض الحالات الأخرى يوجد أكثر من منوال (كما في حالة تكرار بعض القيم بنفس الدرجة وأكثر من باقي القيم) .

تمرين(٣-١):

البيانات التالية تمثل درجات **٥٠** طالبا في مادة الإحصاء بإحدى المدارس :

٥٠ – ٧٨ – ٩٦ – ٨٨ – ٨٥ – ٨٠ – ٩٤ – ٧٩ – ٧٦ – ٥٨ – ٩٠ – ٨٥ – ٩٣ – ٦٧ – ٩١ – ٨٤ – ٨٣ – ٨٣ – ٧٥ – ٨٣ – ٨٢ – ٧١ – ٧٢ – ٩٢–٨١ – ٨٤ – ٨٠ – ٩٢ – ٨١ – ٧٧ – ٦٩ – ٨٧ – ٨٩ – ٧٦ – ٧٤ – ٦٩ – ٩٧ – ٧٠ – ٦٦ – ٨٩ – ٦٦ – ٨٣ – ٧٥ – ٧٨ – ٩٤ – ٨٦ – ٧٢ – ٦٤ – ٧٢ – ٧٧ – ٨٨ .

المطلوب :

(أ) تكوين جدول تكراري يبين توزيع الطلاب حسب درجاتهم

(ب) تمثيل البيانات السابقة باستخدام :

١/ المدرج التكراري ٢/ المضلع التكراري ٣/ المنحني التكراري

٢) البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب :

١٥ ، ١٧ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٦ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٧ ، ١٩ ، أحسب :

أ– الوسط الحسابي للعمر ب– الوسيط ج – المنوال

٣) إذ ا فرض أن الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في الفصل في مادة الجغرافيا في العام الماضي هي ٨٠ درجة وفي العام الذي قبلة **٧٥** درجة . فإذ ا فرض أن عدد طلاب الفصل في العام الماضي كان ٢٠ طالبا وفي العام الذي قبلة **١٥** . أحسب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في العامين.

٤) الجدول التالي يبين توزيع مجموعة من الأطفال حسب درجاتهم في إحدى اختبارات الذكاء :

فئات درجات الذكاء	٣٠ ــ	٤٠ ــ	٥٠ ــ	٦٠ ــ	٧٠ ــ	٨٠ ــ	٩٠ ــ ١٠٠	المجموع
عدد الأطفال	٤	٦	٨	١٠	٨	٦	٤	٤٦

المطلوب : (أ) الوسط الحسابي (ب) الوسيط (ج) ا

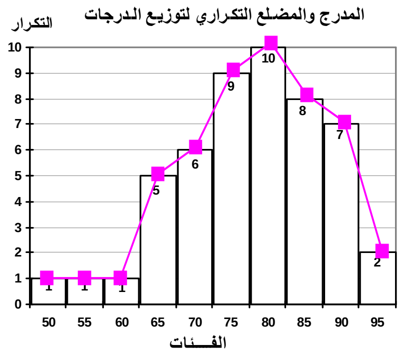
ملاحظة: إذ ا كان ترتيب الوسيط هو واحد من التكرارات المتجمعة الصاعدة في هذه الحالة لا يستخدم القانون بل نحصل علي قيمة الوسيط مباشرة من الجدول المتجمع الصاعد .

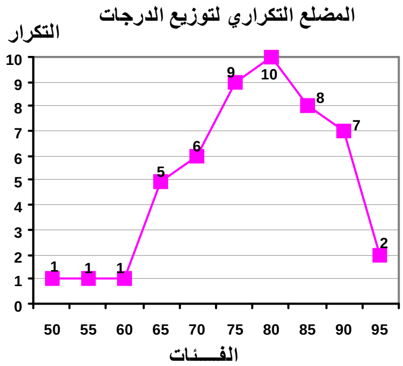
إجابات تمارين الوحدة الثالثة :

تمرين (٢.٣) :

(١)

الفئات	العلامـــات	التكرار
٥٠ ____	١	١
٥٥ ____	١	١
٦٠ ____	١	١
٦٥ ____	~~١١١١~~	٥
٧٠ ____	١ ~~١١١١~~	٦
٧٥ ____	١١١١ ~~١١١١~~	٩
٨٠ ____	~~١١١١~~ ~~١١١١~~	١٠
٨٥ ____	١١١ ~~١١١١~~	٨
٩٠ ____	١١ ~~١١١١~~	٧
٩٥ ____	١١	٢
المجمـــــــــــوع		٥٠





(٢) أ– ١٦,٨ ب– ١٧ ج– ١٧

(٣) ٧٧,٨٥٧

(٤) أ– ٦٥ ب– ٦٠,٥ ج– ٦٠,٥